FUNCIONES

ANDREA CALVO GARCÍA

Nº 6 2º C Bach.

INDICE

FUNCIONES

1. Funciones reales de variable real.
2. Clasificación de funciones.
3. Puntos de corte con los ejes.
4. Signo de una función o intervalos de signo constante.
5. Dominio y recorrido de una función.
6. Tasa de variación media.
7. Crecimiento y decrecimiento de una función.
8. Concavidad y convexidad y puntos de inflexión de una función.
9. Máximos y mínimos de una función.
10. Acotación de una función. Extremos absolutos.
11. Simetrías de una función.
12. Periodicidad de una función.
13. Transformaciones de funciones.
    a) Simetrías: $-f(x)$ y $f(-x)$
    b) Valor absoluto: $|f(x)|$
    c) Traslaciones verticales y horizontales: $K + f(x)$ y $f(x + K)$
    d) Dilataciones y contracciones: $K \cdot f(x)$ y $f(K \cdot x)$
14. Operaciones con funciones.
15. Composición de funciones.
16. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
17. Función inversa.

FUNCIONES

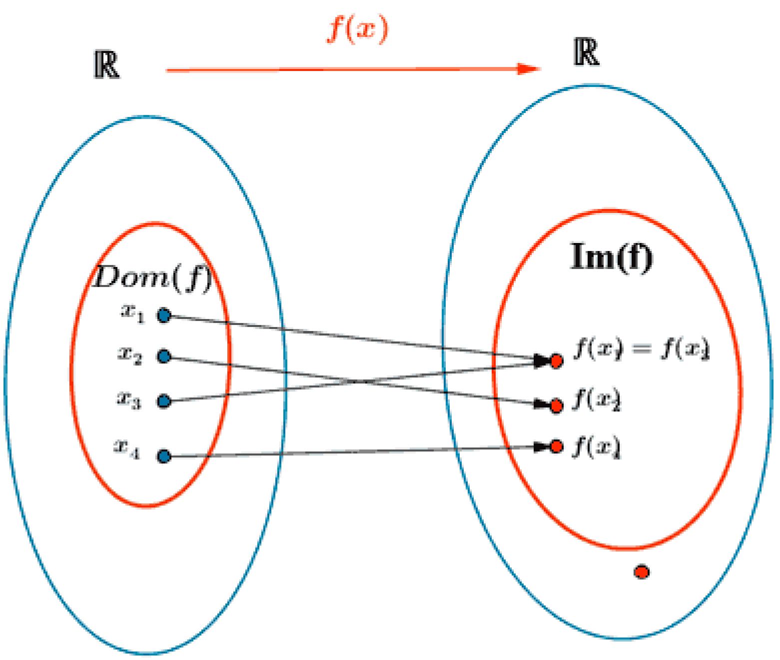
1. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Una función real f de variable real es una relación que asocia a cada número real x un único número real f(x).

Se expresa de la siguiente manera:

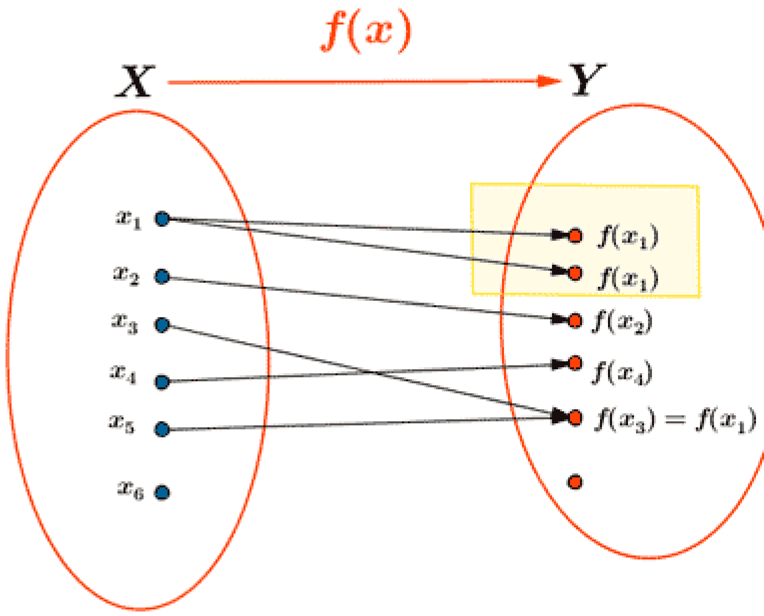
$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

La variable x se llama variable independiente y la variable y es la variable dependiente.



Es función

A cada valor de x le corresponde un único valor de y



No es función

Al valor x_1 le corresponde dos valores de y

2. CLASIFICACION DE FUNCIONES

- **Funciones**
  - **Algebráicas**
    - **Polinómicas:** $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 1$
    - **Racionales:** $f(x) = \dfrac{4x + 3}{x^2 - 1}$
    - **Irracionales:** $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$
  - **Transcendentes**
    - **Exponenciales:** $f(x) = 3^x$
    - **Logarítmicas:** $f(x) = \log_5 x$
    - **Trigonométricas:** $f(x) = \text{sen } 2x$
  - **A trozos** $f(x)= |x|$

Una función es algebraica si la variable independiente x solo tiene operaciones algebraicas: suma, resta, multiplicación, elevar a potencias y extraer raíces.

Una función es transcendente si no es algebraica.

Funciones algebraicas: polinómicas

- **Función polinómica**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \dots\ + a_2\ x^2 + a_1x + a_0$$

- **Función de primer grado:**

1. Función constante: $y = K$
2. Función afín: $y = ax + b$
3. Función lineal: $y = ax$

- **Función de segundo grado:**

    1. Función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$

- **Función de tercer grado:**

    1. Función cúbica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- **Función de cuarto grado:**

    1. Función cuartica: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$

- **Función potencial.**

    1. Función potencial: $y = ax^n$

Funciones algebraicas: racionales

- **Función racional del tipo: $y=k / x$**

- **Función racional del tipo: $y= k / (x - a)^2$**

Funciones algebraicas: irracionales

- **Función irracional o función radical:**

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

Funciones transcendentes: exponenciales

- **Función exponencial: $y= a^x$**

Funciones transcendentes: logarítmicas

- **Función logarítmica: $y= \log_a x$**

Funciones transcendentes: trigonométricas

- **Función seno: y=sen x**
- **Función coseno: y= cos x**
- **Función tangente: y= tg x**
- **Función cotangente: y= cotg x**
- **Función secante: y= sec x**
- **Función cosecante: y= cosec x**

Funciones trigonométricas inversas

- **Función arco seno: y=arc sen x**
- **Función arco coseno: y= arc cos x**
- **Función arco tangente: y=arc tg x**

Funciones a trozos

- **Valor absoluto de una función: y = |x|**
- **Función signo: y= sig x**
- **Función parte entera de x: y= E(x) ,y= [x] , y=Ent(x)**
- **Función parte decimal de x o función mantisa: y= Dec(x)**
- **Función escalonada.**

FUNCIONES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS

Una función es explícita si viene dada como y = f(x), es decir, la variable dependiente y está despejada.

Una función es implícita si viene dada de la forma f(x, y) = 0, es decir, si la función se expone como una expresión algebraica igualada a 0.

Toda función expresada en forma explícita se puede poner en forma implícita y viceversa.

3. PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

Con el eje de abscisas (eje X)

La segunda coordenada debe ser 0, por lo tanto debe ser del tipo (a, 0). Los valores de a son las raíces de la ecuación **f(x) = 0**.

Con el eje de ordenadas (eje Y)

La primera coordenada debe ser 0, por lo tanto debe ser del tipo (0, b). El valor de b se averigua hallando la imagen de 0, es decir, **b = f (0)**.

Solo puede cortar al eje de ordenadas en un único punto.

4. SIGNO DE UNA FUNCIÓN O INTERVALOS DE SIGNO CONSTANTE

Para representar gráficamente una función es útil saber en qué intervalos su gráfica está por encima o por debajo del eje X.

- Si la gráfica va por encima: **f(x) > 0**
- Si va por debajo: **f(x) < 0**

Para ello, se deben hallar los puntos de corte de la función con el eje X y los puntos de discontinuidad. Después se estudia el signo de la función en los distintos intervalos en que ha quedado dividido dicho eje.

5. DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Dada una función real de variable real:

$$\begin{aligned} f: D \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

El dominio de la función es el conjunto $D \subset R$ de los valores para los que está definida la función. Se representa por Dom f.

$$\text{Dominio de } f \ , \ \text{Dom}(f) = \{ \ x \in \mathbb{R} \ | \ f(x) \ \text{ existe} \}$$

El recorrido o imagen de la función es el conjunto de valores que toma la función. Se representa por Im f.

$$\text{Imagen de } f \ , \ \text{Im}(f) = \{ \ y \in \mathbb{R} \ | \ y = f(x) \ , \ x \in \text{Dom}(f) \ \}$$

CALCULAR EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Funciones polinómicas

El dominio es R ya que para todo valor real de la variable x puede calcularse el correspondiente valor y.

Son ejemplos de funciones polinómicas:

$f(x) = x$	$g(x) = 3x - 2$	$h(x) = x^2 - 3x + 5$	$q(x) = x^4 - 3x^2 + 8$
Dom (f) = R	Dom (g) = R	Dom (h) = R	Dom (q) = R

Funciones racionales

El dominio está formado por todos los números reales, excepto por aquellos que anulan el denominador.

Son ejemplos de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{4x}{x-2} \qquad g(x) = \frac{x}{x^2-9} \qquad h(x) = \frac{3}{5-x}$$

El denominador de f se anula cuando x - 2 = 0, es decir, x = 2. Por lo tanto,

Dom (f) = R - {2}

El denominador de g se anula cuando $x^2 - 9 = 0$, es decir, x = ± 3. Por lo tanto,

Dom (g) = R - {- 3, 3}

El denominador de h se anula cuando 5 - x = 0, es decir, x = 5. Por lo tanto,

Dom (h) = R - {5}

Funciones irracionales

Para determinar el dominio de una función irracional existen dos casos:

$$\text{Dada } f(x) = \sqrt[n]{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} \text{si } n \text{ es impar} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \\ \text{si } n \text{ es par} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \{ x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) \geq 0 \} \end{cases}$$

Son ejemplos de funciones irracionales:

$$f(x) = \sqrt{x-5} \qquad h(x) = \sqrt[3]{x^2-5}$$

La función f tiene sentido, al ser n par, cuando x - 5 ≥ 0, es decir, x ≥ 5. Por lo tanto,

Dom (f) = [5, + ∞)

La función h tiene el mismo dominio, al ser n impar, que la función $x^2 - 5$. Por lo tanto,

Dom (h) = R

Funciones exponenciales

El dominio de una función exponencial es igual al dominio de la función que aparezca en el exponente.

$$\text{Si } f(x) = a^{g(x)}, \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$$

Son ejemplos de funciones exponenciales:

$$f(x) = 3^{x^2-5} \qquad\qquad h(x) = 5^{\frac{x^3}{x-7}}$$

La función f tiene el mismo dominio que la función $x^2 - 5$. Por lo tanto,

Dom (f) = R

La función h no tiene sentido cuando se anula el denominador del exponente,

x - 7 = 0, es decir x = 7. Por lo tanto,

Dom (h) = R - {7}

Funciones logarítmicas

Debido a que solo tienen sentido los logaritmos de números positivos, resulta que:

$$\text{Si } f(x) = \log_a [\, g(x) \,], \quad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Dom}(f) = \{\, x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) > 0 \,\}$$

Son ejemplos de funciones logarítmicas:

$$f(x) = \log_5 \left(x - 3\right) \qquad\qquad h(x) = \log \left(x^2 - 4\right)$$

Para f(x) resolvemos la inecuación x - 3 > 0, es decir x > 3. Por lo tanto,

$$\text{Dom }(f) = (-\infty, 3)$$

Para $h(x)$ resolvemos la inecuación $x^2 - 4 > 0$, es decir $(x + 2)(x - 2) > 0$

Para $x = -3$ tenemos que $(-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$.

Para $x = 0$ tenemos que $0^2 - 4 = -4 < 0$.

Para $x = 3$ tenemos que $3^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$.

Por lo tanto,

$$\text{Dom }(h) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Dominio y recorrido de las funciones trigonométricas

Las funciones $f(x) = \text{sen } g(x)$ y $f(x) = \cos g(x)$ están definidas siempre que lo esté la función $g(x)$.

La función $f(x) = \text{tg } g(x)$ está definida siempre que $g(x) \neq \pi/2 + k\cdot\pi$

	Dominio	**Imagen, rango o recorrido**
y = sen x	R	$\{ y \in R \mid -1 \leq y \leq 1 \}$
y = cos x	R	$\{ y \in R \mid -1 \leq y \leq 1 \}$
y = tg x	$\{ x \in R \mid x \neq \pi/2\,(2k + 1) \}$	R
y = cotg x	$\{ x \in R \mid x \neq k\cdot\pi \}$	R
y = sec x	$\{ x \in R \mid x \neq \pi/2\,(2k + 1) \}$	$\{ y \in R \mid y \leq -1$ ó $y \geq 1 \}$
y = cosec x	$\{ x \in R \mid x \neq k\cdot\pi \}$	$\{ y \in R \mid y \leq -1$ ó $y \geq 1 \}$

Dominio y recorrido de las funciones trigonométricas inversas

	Dominio	**Imagen, rango o recorrido**
y = arc sen x	$\{ x \in R \mid -1 \leq x \leq 1 \}$	$\{ y \in R \mid -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \}$
y = arc cos x	$\{ x \in R \mid -1 \leq x \leq 1 \}$	$\{ y \in R \mid 0 \leq y \leq \pi \}$
y = arc tg x	R	$\{ y \in R \mid -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \}$
y = arc cotg x	R	$\{ y \in R \mid 0 \leq y \leq \pi \}$
y = arc sec x	$\{ x \in R \mid x \leq -1$ ó $x \geq 1 \}$	$\{ y \in R \mid 0 \leq y \leq \pi , y \neq \pi/2 \}$
y = arc cosec x	$\{ x \in R \mid x \leq -1$ ó $x \geq 1 \}$	$\{ y \in R \mid -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 , y \neq 0 \}$

Calcular el recorrido de una función

Para hallar el recorrido de una función f(x) hacemos lo siguiente:

1. Igualamos f(x) = y
2. Despejamos la variable x.
3. Estudiamos el dominio de la nueva función.

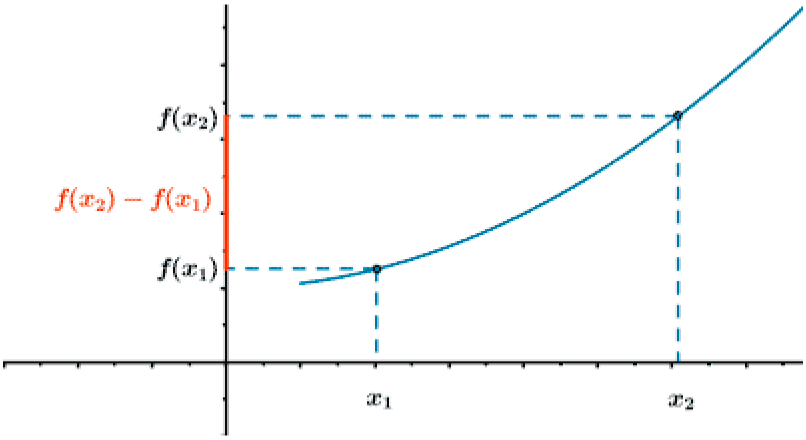
6. TASA DE VARIACIÓN MEDIA

TASA DE VARIACIÓN EN UN INTERVALO

La tasa de variación, TV, de una función, f(x), en un intervalo [x1, x2], es:

$$TV_{[x_1, x_2]} = f(x_2) - f(x_1)$$

La TV representa el aumento o la disminución de la función en los extremos del intervalo.

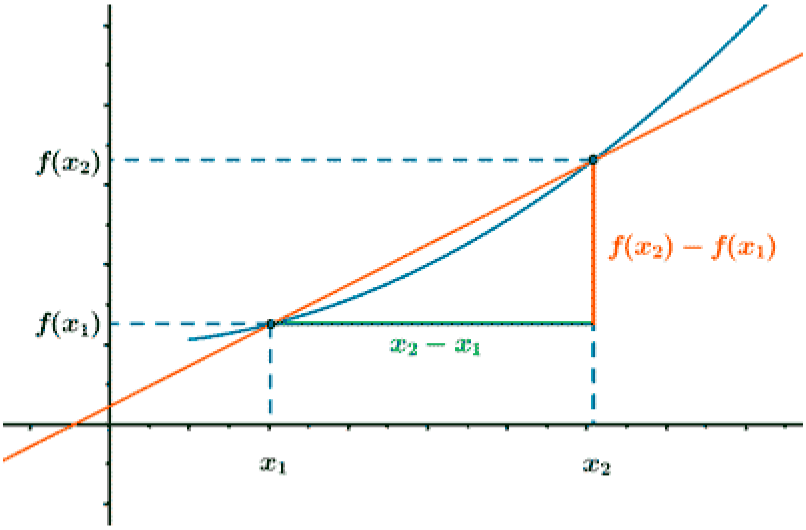


TASA DE VARIACIÓN MEDIA EN UN INTERVALO

La tasa de variación media, TVM, de una función, f(x), en un intervalo [x1, x2], es:

$$TV_{[x_1, x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

La tasa de variación media en un intervalo es la pendiente de la recta que une los puntos de la gráfica correspondientes a los extremos del intervalo.



Crecimiento y decrecimiento. Tasa de variación media.

- **Tasa de variación media en una función estrictamente creciente**

  Si f(x) es estrictamente creciente en el intervalo [x_1, x_2], la tasa de variación media (TVM) es estrictamente positiva.

$$\mathrm{TVM}_{[x_1\ ,\ x_2]} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

- **Tasa de variación media en una función estrictamente decreciente**

  Si f(x) es estrictamente decreciente en el intervalo [x_1, x_2], la tasa de variación media (TVM) es estrictamente negativa.

$$\mathrm{TVM}_{[x_1\ ,\ x_2]} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$$

- **Tasa de variación media en una función constante**

Si f(x) es constante en el intervalo (x_1, x_2), la tasa de variación media en ese intervalo es cero.

Como f(x) es constante en (x_1, x_2), entonces:

$$f(x_1)=f(x_2) \quad \Rightarrow \quad f(x_1)-f(x_2)=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{TVM}_{[x_1\ ,\ x_2]}=0$$

7. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE UNA FUNCION

Monotonía de una función

La monotonía consiste en estudiar como aumenta o disminuye la variable dependiente y al aumentar o disminuir la variable independiente x.

Crecimiento de una función

- **Crecimiento de una función en un intervalo**

Una función f(x) es estrictamente creciente en un intervalo (a, b) si para dos valores cualesquiera del intervalo x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

Decir que $f(x_1) < f(x_2)$ es lo mismo que:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$$

Será creciente si $f(x_1) \leq f(x_2)$, es decir:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$$

Una función es creciente si al aumentar la 'x' aumenta la 'y'.

- **Crecimiento de una función en un punto**

Una función $f(x)$ es estrictamente creciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno simétrico de x_0 en el que la función es estrictamente creciente. Es decir:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0 \quad \text{para todo} \quad \mathrm{x} \in \mathrm{E}\left(x_0,\, r\right)=\left(x_0-r,\; x_0+r\right)$$

Una función $f(x)$ es creciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno simétrico de x_0 en el que la función es creciente. Es decir:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \text{para todo} \quad \mathrm{x} \in \mathrm{E}\left(x_0,\, r\right)=\left(x_0-r,\; x_0+r\right)$$

Decrecimiento de una función

- **Decrecimiento de una función en un intervalo**

Una función $f(x)$ es estrictamente decreciente en un intervalo (a, b) si para dos valores cualesquiera del intervalo x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

Decir que $f(x1) > f(x2)$ es lo mismo que:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$$

Será creciente si f(x1) ≥ f(x2), es decir:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq 0$$

Una función es decreciente si al aumentar la 'x' disminuye la 'y'.

- **Decrecimiento de una función en un punto**

Una función f(x) es estrictamente decreciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno simétrico de x_0 en el que la función es estrictamente decreciente. Es decir:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0 \quad \text{para todo} \quad \mathrm{x} \in \mathrm{E}(x_0,\ r) = (x_0 - r,\ x_0 + r)$$

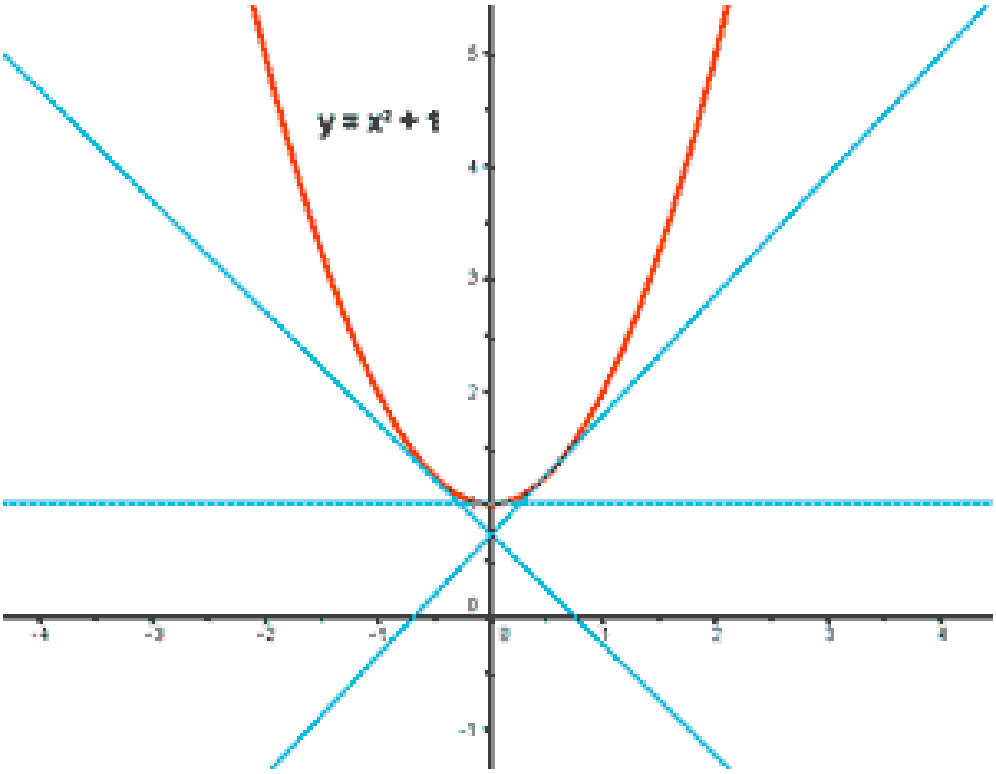
Una función f(x) es decreciente en un punto de abscisa x_0 si existe un entorno simétrico de x_0 en el que la función es decreciente. Es decir:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \mathrm{x} \in \mathrm{E}(x_0,\ r) = (x_0 - r,\ x_0 + r)$$

8. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN DE UNA FUNCIÓN

Concavidad de una función

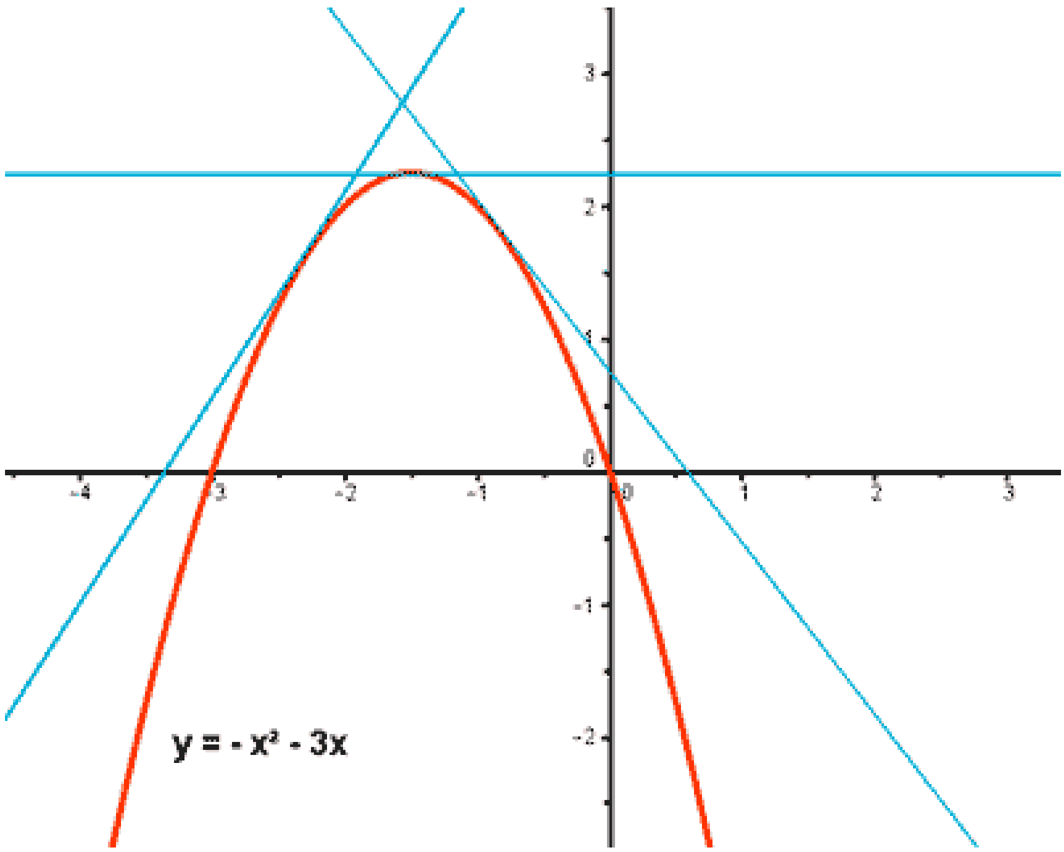
Una función $f(x)$ es cóncava hacia arriba o simplemente cóncava en un punto, si la recta tangente a la gráfica de f en ese punto está por debajo de la gráfica.



La función $f(x) = x^2 + 1$ es cóncava puesto que la tangente para cualquier punto queda por debajo de la gráfica de la función.

Convexidad de una función

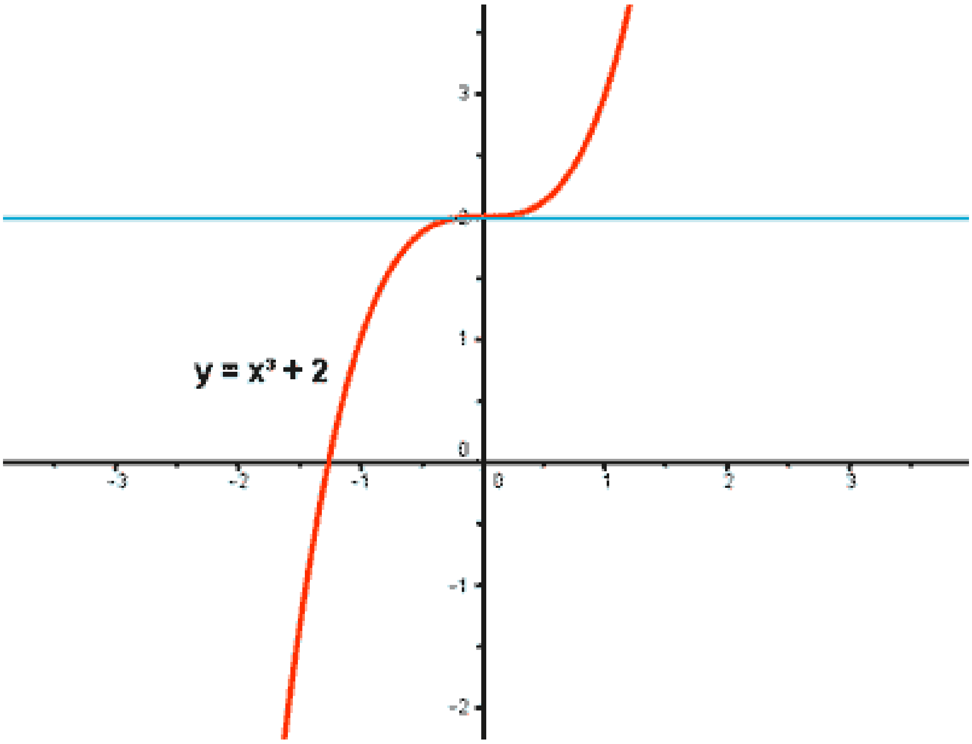
Una función f(x) es cóncava hacia abajo o simplemente convexa en un punto, si la recta tangente a la gráfica de f en ese punto está por encima de la gráfica.



La función $f(x) = -x^2 - 3x$ es convexa puesto que la tangente para cualquier punto queda por encima de la gráfica de la función.

Punto de inflexión

Una función f(x) tiene un punto de inflexión, cuando la recta tangente en ese punto atraviesa la gráfica de la función. Por tanto hay un cambio de curvatura de cóncava a convexa o viceversa.



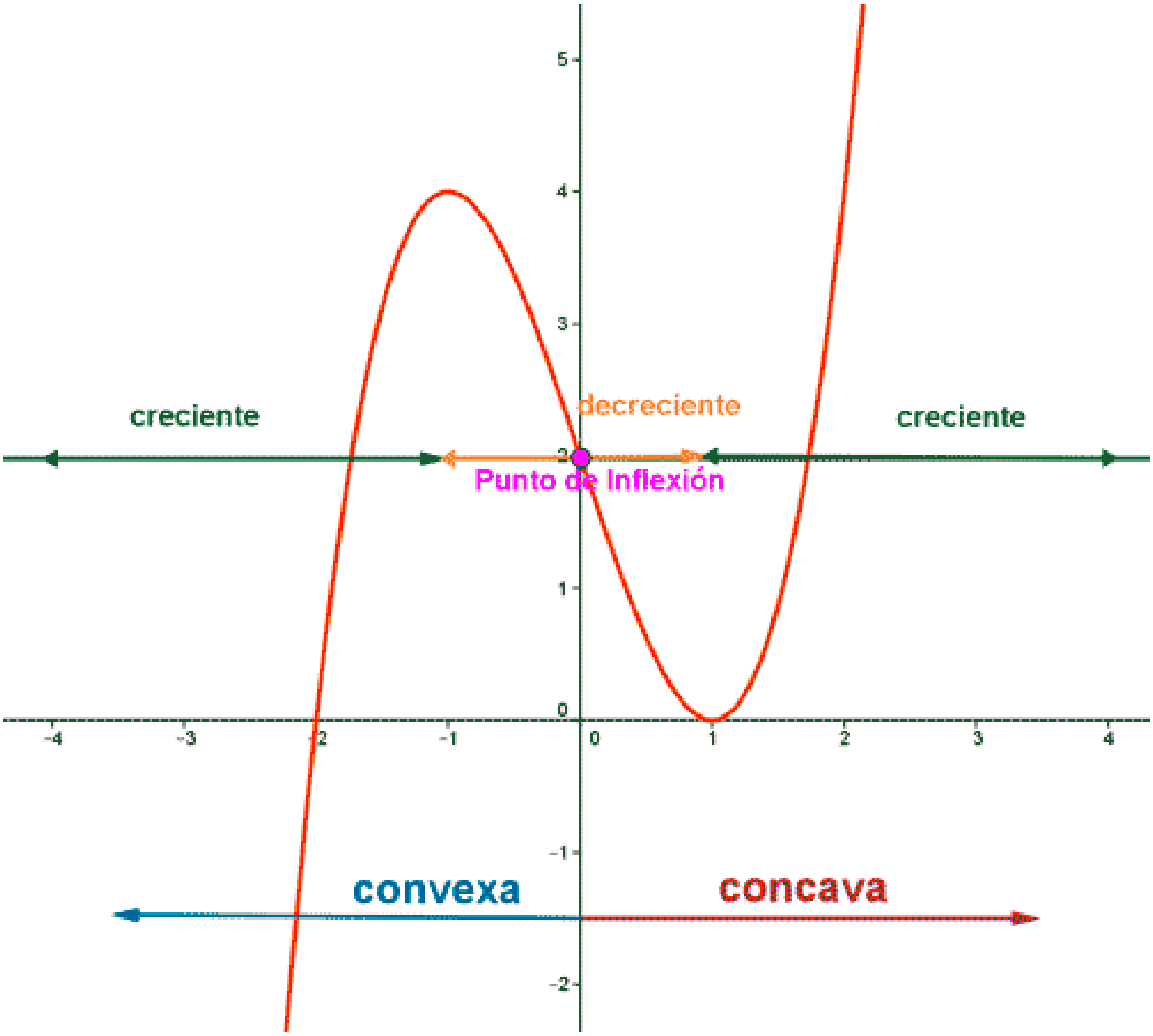
En el punto (0, 2) la función f(x) tiene un punto de inflexión ya que la recta tangente en ese punto atraviesa a la gráfica.

Ejemplo de concavidad y convexidad de una función

Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la siguiente función:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

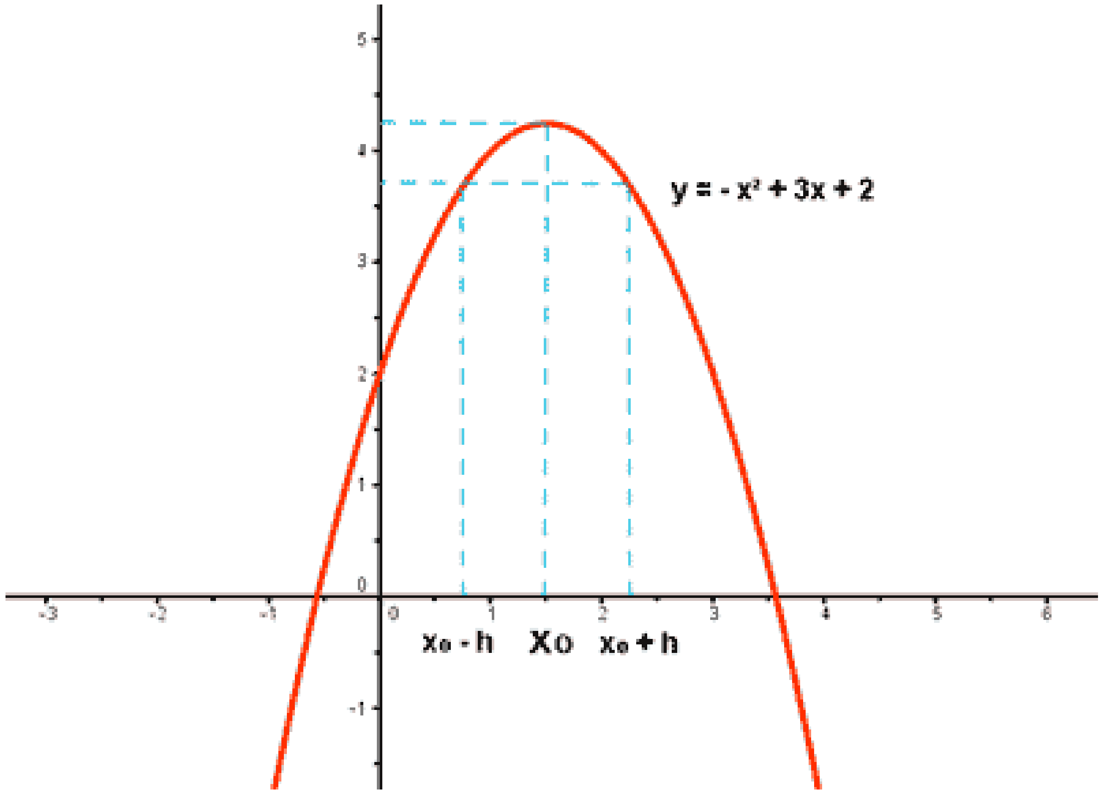
- $(-\infty, 0)$: la función es convexa.
- $(0, \infty)$: la función es cóncava.



9. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

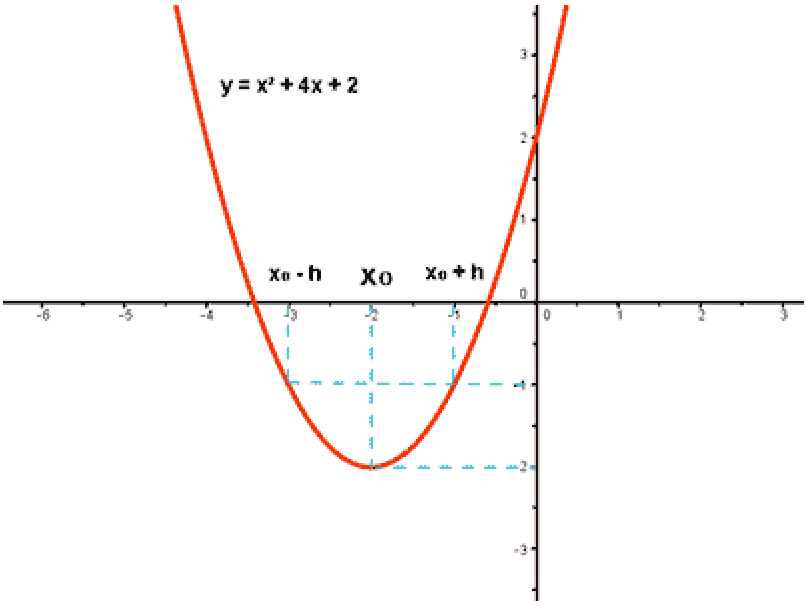
Máximo relativo de una función

Una función f alcanza un máximo relativo en un punto de abscisa $x0$ si existe un entorno reducido de $x0$, es decir $E^*(x0, h) = (x0 - h, x0 + h) - \{x0\}$, tal que $f(x) < f(x0)$ para todos los puntos de dicho entorno reducido.



Mínimo relativo de una función

Una función f alcanza un mínimo relativo en un punto de abscisa x0 si existe un entorno reducido de x0, es decir E*(x0, h) = (x0 - h, x0 + h) - {x0}, tal que f(x) > f(x0) para todos los puntos de dicho entorno reducido.



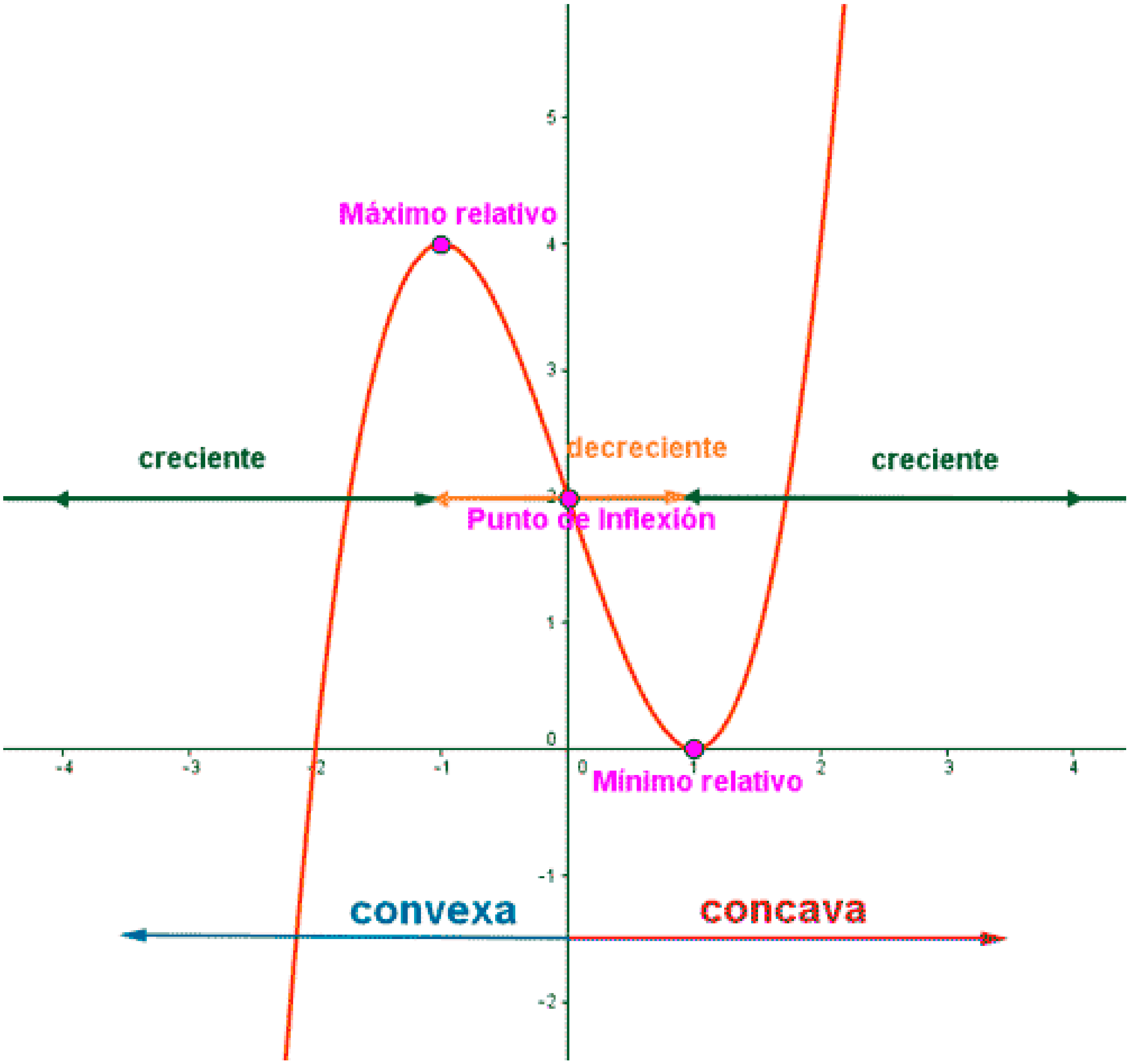
Entorno reducido: $E^*(x_{0,}\ h) = E(x_{0,}\ h)$ - {x0} = (x0 - h, x_0) ∪ (x0, x_0 + h)

Ejemplo de mínimos y máximos relativos de una función

Determinar los mínimos y máximos relativos en la gráfica de la siguiente función:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

- El punto (-1, 4) es un máximo relativo.
- El punto (1, 0) es un mínimo relativo.



10. ACOTACION DE UNA FUNCION. EXTREMOS ABSOLUTOS

Función acotada superiormente. Máximo absoluto

Una función f decimos que está acotada superiormente si existe un número K tal que la imagen de cualquier punto x del dominio de f es siempre menor o igual que ese valor.

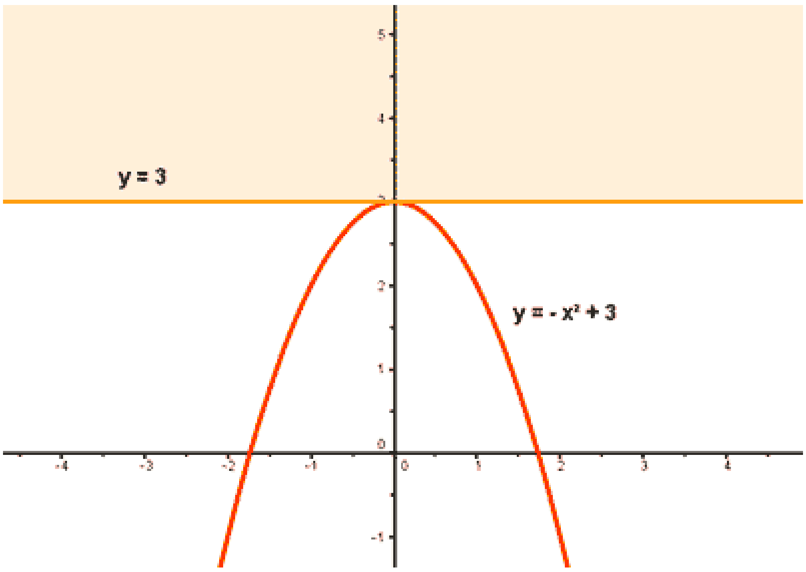
$$f \text{ está acotada superiormente } \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$$

$$\text{tal que } f(x) \leq K \text{ para todo } x \in \mathrm{Dom}(f)$$

A este número K le llamamos cota superior de la función f.

Una función acotada superiormente tiene infinitas cotas superiores. A la más pequeña de las cotas superiores le llamamos extremo superior o supremo y lo expresamos como sup (f).

Si la función alcanza al supremo, este se llama máximo absoluto de la función, es decir, que existe $x_0 \in$ Dom (f) tal que $f(x_0) = K$, siendo K = sup (f), diremos que f tiene un máximo absoluto y este máximo absoluto es K.



Observando la gráfica, podemos advertir que una cota superior es K= 4 o para toda k>4 es cota superior.

También se puede advertir que la cota superior más pequeña es K= 3 por tanto sup (f) = 3.

Como K = 3 ∈ Im (f) (K pertenece a la imagen=rango=recorrido de f) tenemos que K = 3 es el máximo absoluto de la función**.**

Gráficamente, si al trazar la línea horizontal del supremo, esta toca a la gráfica de la función en algún punto, entonces la función tiene un máximo absoluto, y si no toca a la gráfica en ningún punto no tiene máximo absoluto.

Función acotada inferiormente. Mínimo absoluto

Una función f decimos que está acotada inferiormente si existe un número P tal que la imagen de cualquier punto x del dominio de f es siempre mayor o igual que ese valor.

$$f \quad \text{está acotada inferiormente} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, P \in \mathbb{R}$$

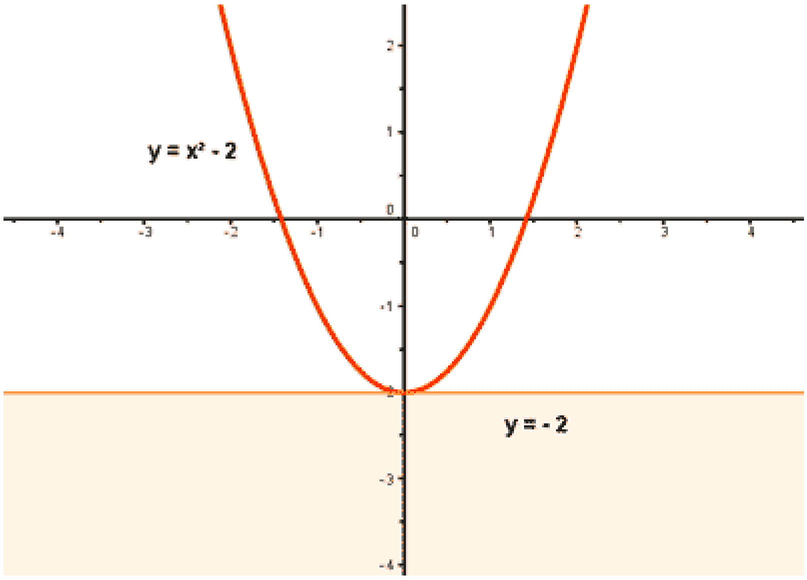
$$\text{tal que} \quad f(x) \geq P$$

$$\text{para todo} \quad x \in \text{Dom}(f)$$

A este número P le llamamos cota inferior de la función f.

Una función acotada inferiormente tiene infinitas cotas inferiores. A la más grande de las cotas inferiores le llamamos extremo inferior o ínfimo y lo expresamos como inf (f).

Si la función alcanza al supremo, este se llama mínimo absoluto de la función, es decir, que existe x_0 ∈ Dom (f) tal que $f(x_0)$ = P, siendo P = inf (f), diremos que f tiene un mínimo absoluto y este mínimo absoluto es P.



Observando la gráfica, podemos advertir que una cota inferior es P=-3 o para toda P<-3 es cota inferior.

También se puede advertir que la cota inferior más grande es P= -2 por tanto inf (f) = - 2.

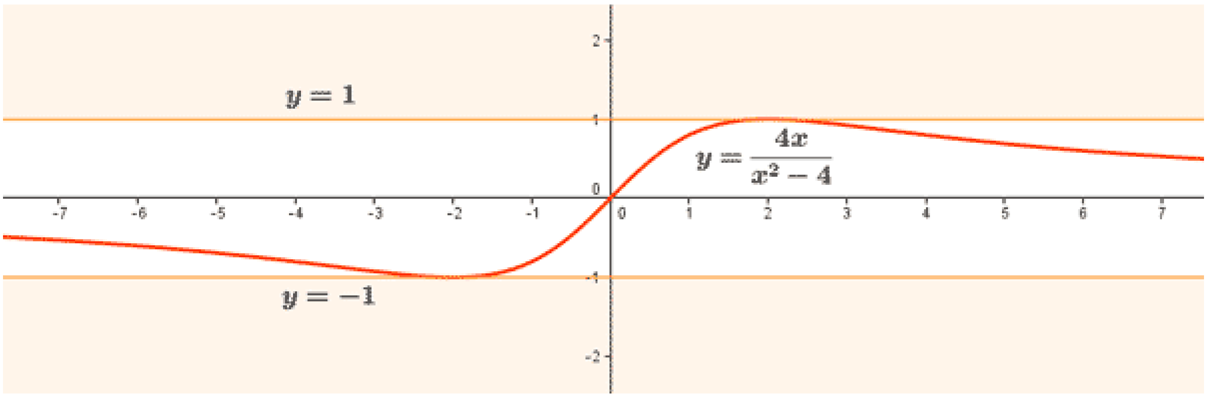
Como P = - 2∈ Im (f) tenemos que P = - 2 es el mínimo absoluto de la función.

Gráficamente, si al trazar la línea horizontal del ínfimo, ésta toca a la gráfica de la función en algún punto, entonces la función tiene un mínimo absoluto, y si no toca a la gráfica en ningún punto no tiene mínimo absoluto.

Función acotada

Una función f está acotada si está acotada superior e inferiormente.

Ejemplo de función acotada: **$f(x) = 4x / (x^2 - 4)$**



Una cota inferior es P = -2

Observando la gráfica del ejemplo, podemos ver que la cota inferior más grande es P = -1, por lo que inf (f) = -1.

Como $-1 \in Im(f)$ tenemos que P = -1 es el mínimo absoluto de la función. De hecho, al trazar la recta y = -1, ésta toca a la gráfica de la función.

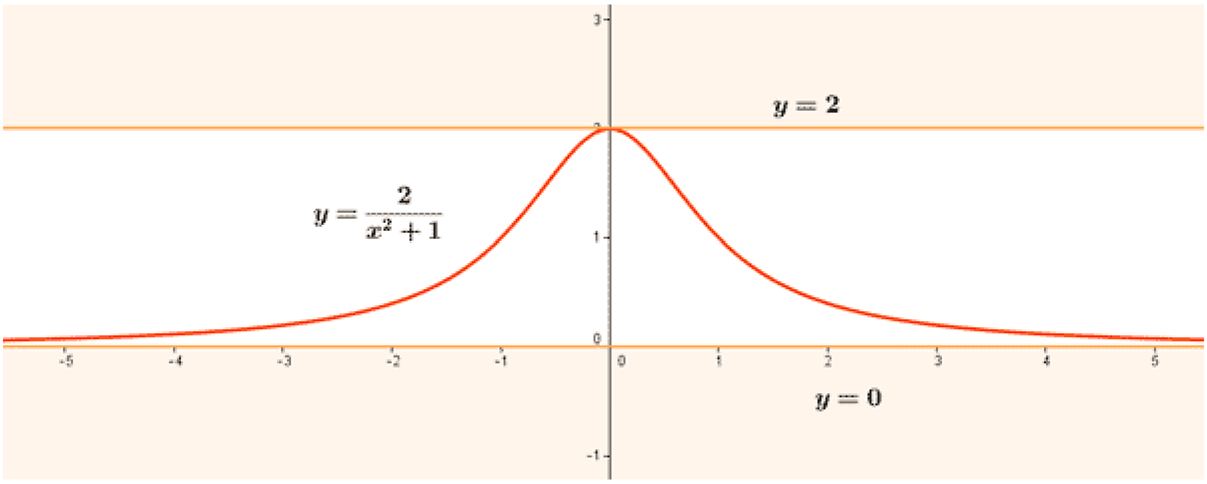
Una cota superior es K = 2

Por otro lado, la cota superior más pequeña es K = 1, por lo que sup (f) = 1.

Como $1 \in Im(f)$ tenemos que K = 1 es el máximo absoluto de la función. Además, al trazar la recta y = 1, también vemos que ésta toca a la gráfica de la función.

Por tanto, la función está acotada, pues está acotada tanto inferior, como superiormente.

Ejemplo de función acotada: **$f(x) = 2 / (x^2 + 1)$**



Una cota inferior es P = -1

La cota inferior más grande es P = 0, por lo que inf (f) = 0.

Como $0 \notin \text{Im}(f)$ tenemos que P = 0 no es mínimo absoluto de la función. De hecho, al trazar la recta y = 0, ésta no toca a la gráfica de la función.

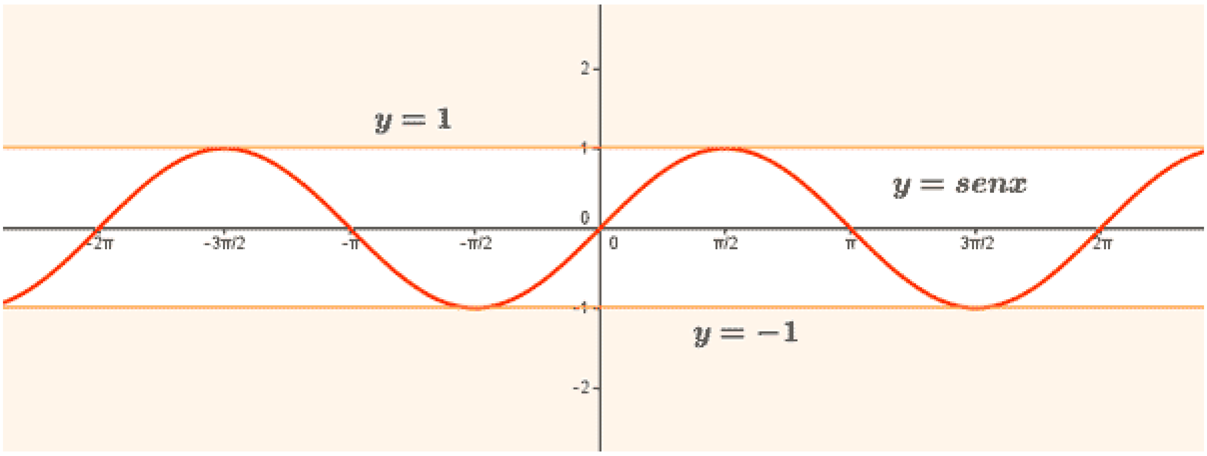
Una cota superior es K =3

Por otro lado, la cota superior más pequeña es K = 2, por lo que sup (f) = 2.

Como $2 \in \text{Im}(f)$ tenemos que K = 2 es el máximo absoluto de la función. Además, al trazar la recta y = 2, vemos que ésta toca a la gráfica de la función.

Por tanto, la función está acotada, pues está acotada tanto inferior, como superiormente.

Ejemplo de función acotada:



Una cota inferior es P = -2

La cota inferior más grande es P = -1, por lo que inf (f) = -1**.**

Como -1 ∈ Im (f) tenemos que P = -1 es el mínimo absoluto de la función**.** De hecho, al trazar la recta y = -1, ésta toca a la gráfica de la función.

Una cota superior es K = 2

Por otro lado, la cota superior más pequeña es K= 1, por lo que sup (f) = 1**.**

Como 1 ∈ Im (f) tenemos que K = 1 es el máximo absoluto de la función**.** Además, al trazar la recta y = 1, también vemos que ésta toca a la gráfica de la función.

Por tanto, la función está acotada, pues está acotada tanto inferior, como superiormente.

11. SIMETRIAS DE UNA FUNCION

Funciones pares

Una función f es simétrica respecto al eje de ordenadas (Y) si verifica que:

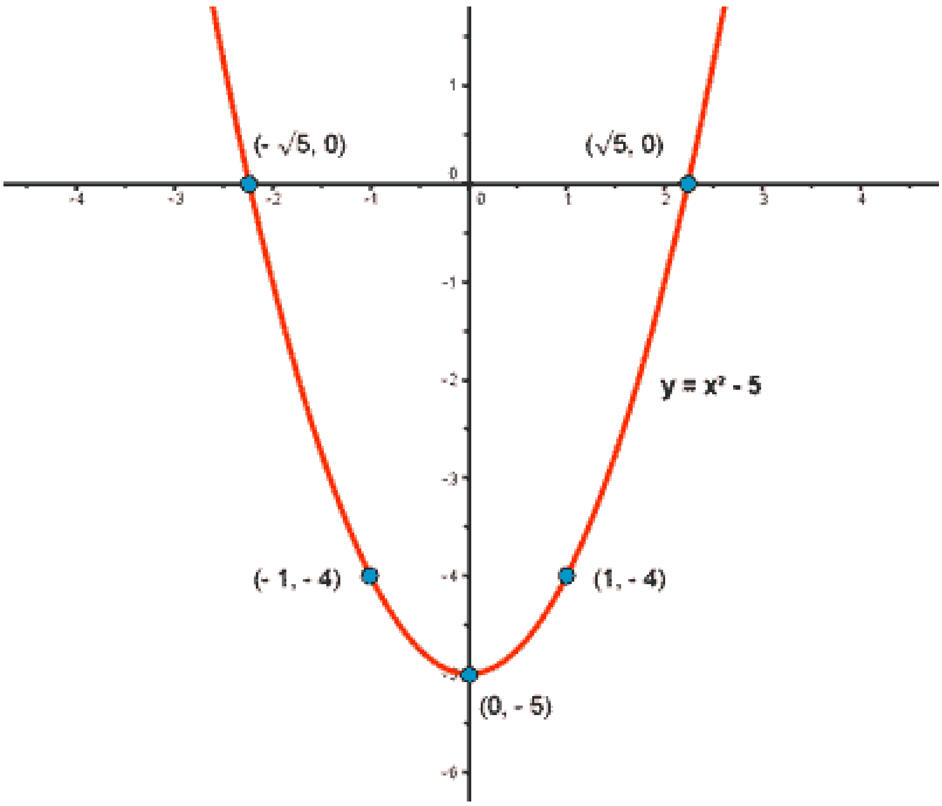
$$f(-x) = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom}(f)$$

Las funciones simétricas respecto al eje de ordenadas se denominan funciones pares.

$f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5$

$f(-x) = f(x)$

Por lo tanto se cumple la condición de función par.



Funciones impares

Una función f es simétrica respecto al origen de coordenadas si verifica que:

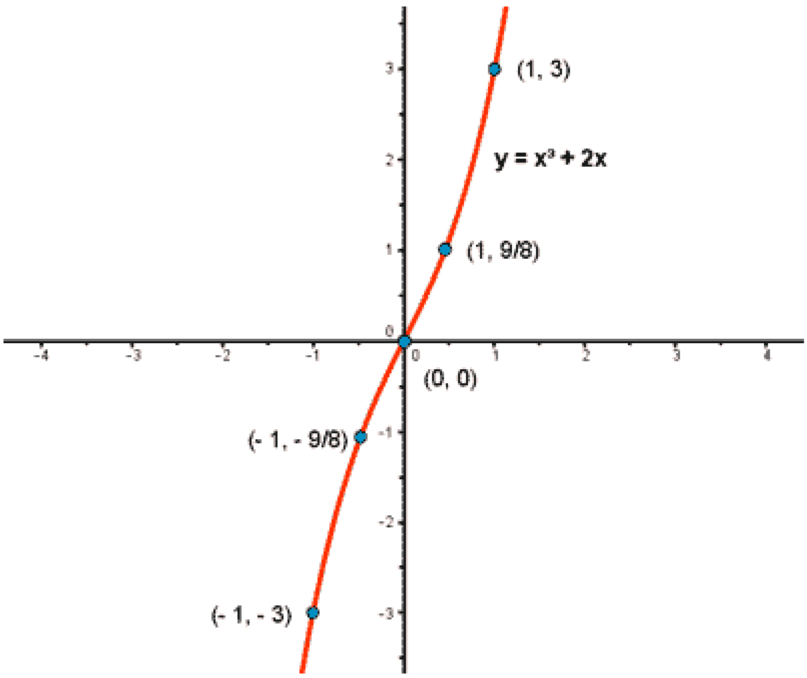
$$f(-x) = -f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom}(f)$$

Las funciones simétricas respecto al origen de coordenadas se denominan funciones impares.

$f(-x) = (-x)^3 + 2\cdot(-x) = -x^3 - 2x = -(x^3 + 2x$

$f(-x) = -f(x)$

Por lo tanto se cumple la condición de función impar.



Función que no es par ni impar

La función $f(x) = x^2 - 3x$ no es ni par ni impar, puesto que:

$f(-x) = (-x)^2 - 3\cdot(-x) = x^2 + 3x$, por lo tanto $f(-x) \neq \pm f(x)$

12. PERIODICIDAD DE UNA FUNCION

Una función f es periódica de periodo $T > 0$ si para cualquier valor de x del dominio de la función se cumple que:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ \dots \ = f(x+k\cdot T)$$

Siendo K un número entero. Simplificando la expresión:

$$f(x+K\cdot T) = f(x) \quad \textbf{para todo} \quad K \in \mathbb{Z}$$

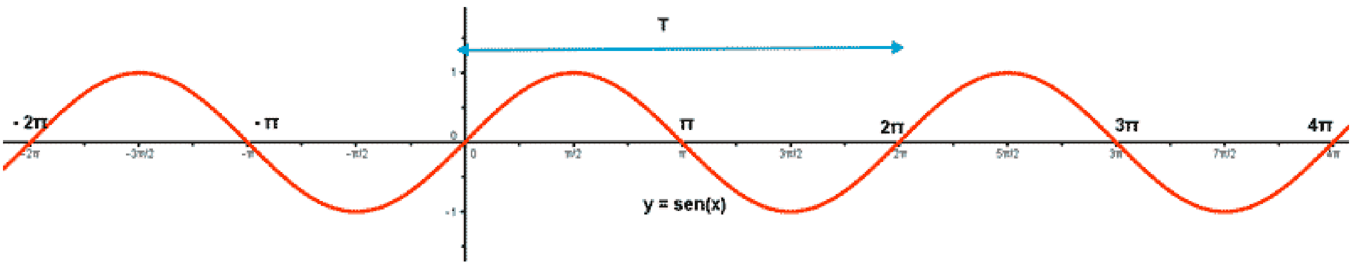
Es decir, una función es periódica cuando se repite cada cierto intervalo.

Ejemplo de función periódica: sen x

La función $f(x) = \text{sen}(x)$ es periódica, ya que se cumple que: $f(x) = f(x + K\cdot 2\pi)$ para todo $K \in Z$.

$$\text{Sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 4\pi) = \text{sen}(x + 6\pi) = \dots$$

Además, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$, por lo tanto es impar, y su representación gráfica es la siguiente:

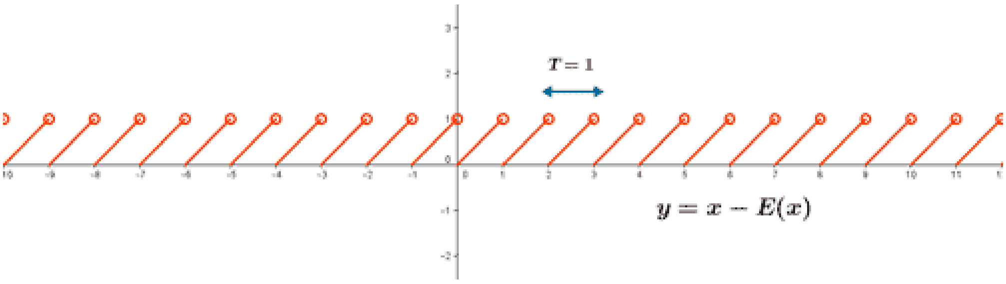


Si a un ángulo cualquiera x le sumamos una vuelta completa, es decir, 2π rad, las razones trigonométricas del nuevo ángulo coinciden con las de x, por tanto: $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$

Ejemplo de función periódica: función mantisa

La función $f(x) = x - E(x)$, o función mantisa, es periódica ya que se cumple que: $f(x) = f(x + K)$ para todo $K \in Z$

$$x - E(x) = (x + 1) - E(x + 1) = (x + 2) - E(x + 2) = \ldots$$



13. TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Dada la función $f(x)$ vamos a hallar las funciones relacionadas con ellas:

a) Simetrías: $- f(x)$ y $f(- x)$

b) Valor absoluto: $|f(x)|$

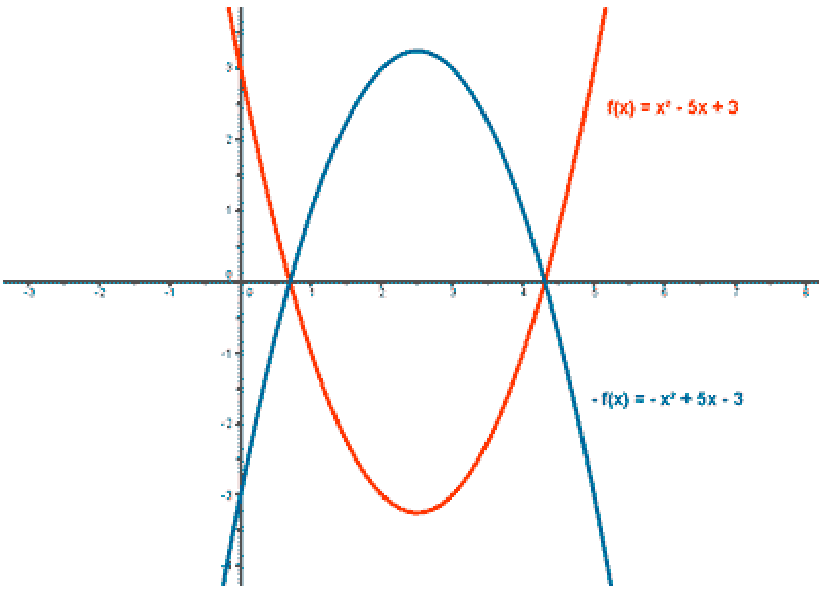
c) Traslaciones verticales y horizontales: $K + f(x)$ y $f(x + K)$

d) Dilataciones y contracciones: $K \cdot f(x)$ y $f(K \cdot x)$

a) Simetrías: - f(x) y f (- x)

La función - f(x)

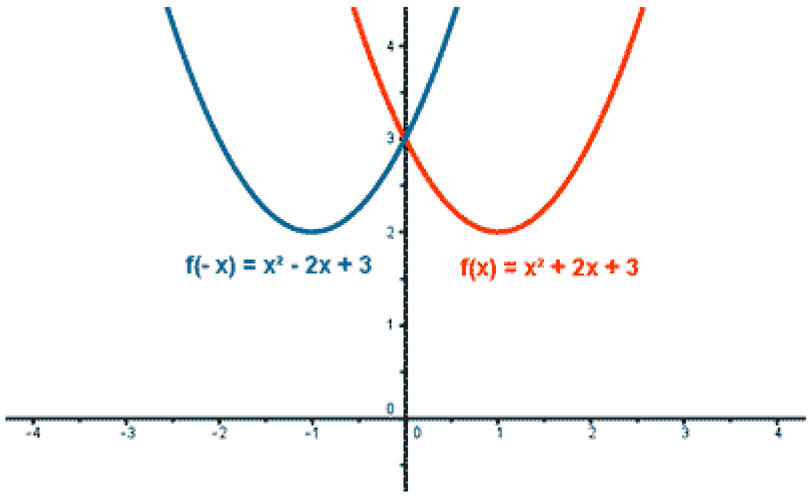
La función $- f(x)$ cambia de signo a la función $f(x)$. Las gráficas de $f(x)$ y $-f(x)$ son simétricas respecto al eje OX.



Las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 3$ y $-f(x) = -(x^2 - 5x + 3) = -x^2 + 5x - 3$ son simétricas respecto al eje OX.

La función f (- x)

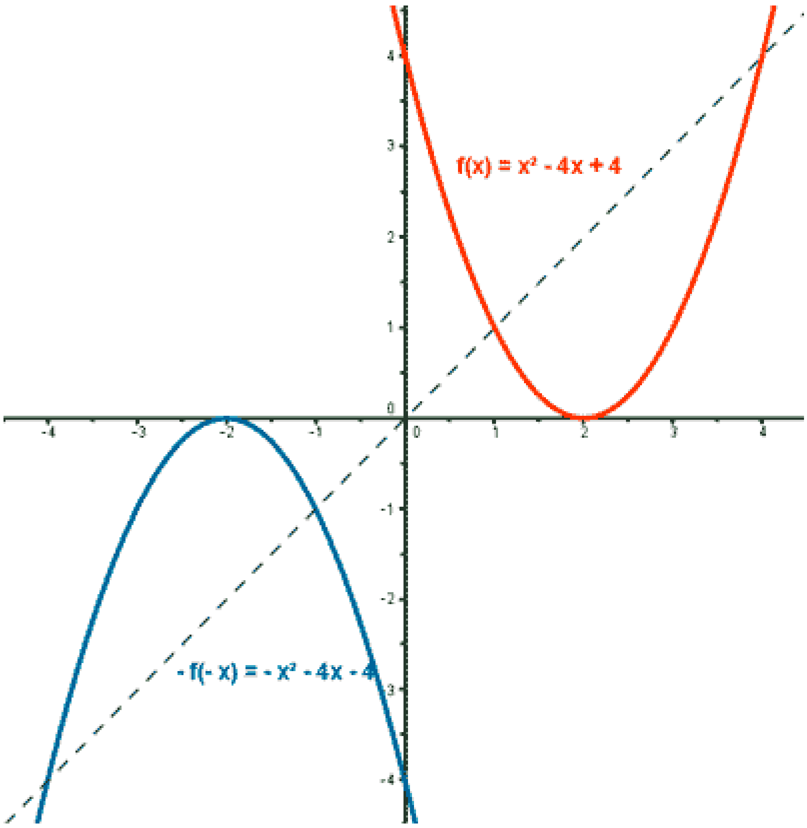
La función $f(-x)$ se obtiene sustituyendo x por $-x$ en la fórmula de $f(x)$. Esta función es simétrica con respecto al eje OY de la función $f(x)$.



Las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 3$ y $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 3 = x^2 - 2x + 3$ son simétricas respecto al eje OY.

La función $-f(-x)$

La función $-f(-x)$ se obtiene sustituyendo x por $-x$ en la fórmula de $f(x)$ y cambiando los signos de la función. Esta función es simétrica con respecto al origen de coordenadas.



Las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 4$ y $-f(-x) = -(-x)^2 + 4(-x) - 4 = -x^2 - 4x - 4$ son simétricas respecto al origen de coordenadas.

Resumen de simetrías:

Gráfica original...: $y = f(x)$

Simétrica (respecto al eje OX)...: $y = - f(x)$

Simétrica (respecto al eje OY)..: $y = f(- x)$

Simétrica (respecto al origen)..: $y = - f(- x)$

b) Valor absoluto de una función: |f(x)|

La función |f(x)| cambia de signo los resultados negativos de f(x);
los resultados positivos los deja iguales. Su gráfica no puede aparecer por debajo del eje OX.

El valor absoluto de una función se define como:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Ejemplos del valor absoluto de una función

1) f(x) = | 3x - 2 |

$$|3x - 2| = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si} \quad 3x - 2 \geq 0 \\ -3x + 2 & \text{si} \quad 3x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{2}{3} \\ -3x + 2 & \text{si} \quad x < \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Dom (f) = R

Im (f) = [0, +∞)

Puntos de corte**:**

Para   x = 0   sustituimos en:

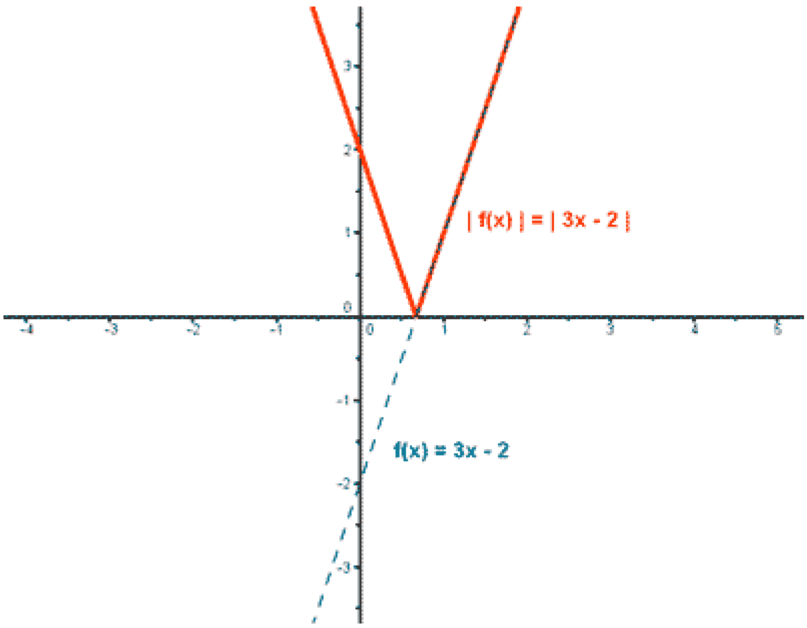
f (0) = - 3·0 + 2 = 2

El punto de corte es: (0, 2)

Para que f(x) = 0 se tiene que:

3x - 2 = 0   →   x = 2/3

El punto de corte es: (2/3, 0)



2) f(x) = | x² - 5x + 5 |

$$\left| x^2 - 5x + 5 \right| = \begin{cases} x^2 - 5x + 5 & \text{si} \quad x^2 - 5x + 5 \geq 0 \\ -x^2 + 5x - 5 & \text{si} \quad x^2 - 5x + 5 < 0 \end{cases}$$

Resolvemos la inecuación: $x^2 - 5x + 5 \geq 0$

$x^2 - 5x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$A = \left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right) \quad , \quad B = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) \quad , \quad C = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \infty\right)$$

- Intervalo A: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 5 = 5 > 0$
- Intervalo B: $x = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 5 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 5 = -1 < 0$
- Intervalo C: $x = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 5 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 5 = 1 > 0$

Por tanto, tendremos que $x^2 - 5x + 5 \geq 0$ en los intervalos A y C.

Y será $x^2 - 5x + 5 < 0$ únicamente en el intervalo B.

La función queda:

$$\left| x^2 - 5x + 5 \right| = \begin{cases} x^2 - 5x + 5 & \text{si} \quad x \leq \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \\ -x^2 + 5x - 5 & \text{si} \quad \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \\ x^2 - 5x + 5 & \text{si} \quad \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \leq x \end{cases}$$

Dom (f) = R

Im (f) = [0, +∞)

Puntos de corte:

Para x = 0 sustituimos en:

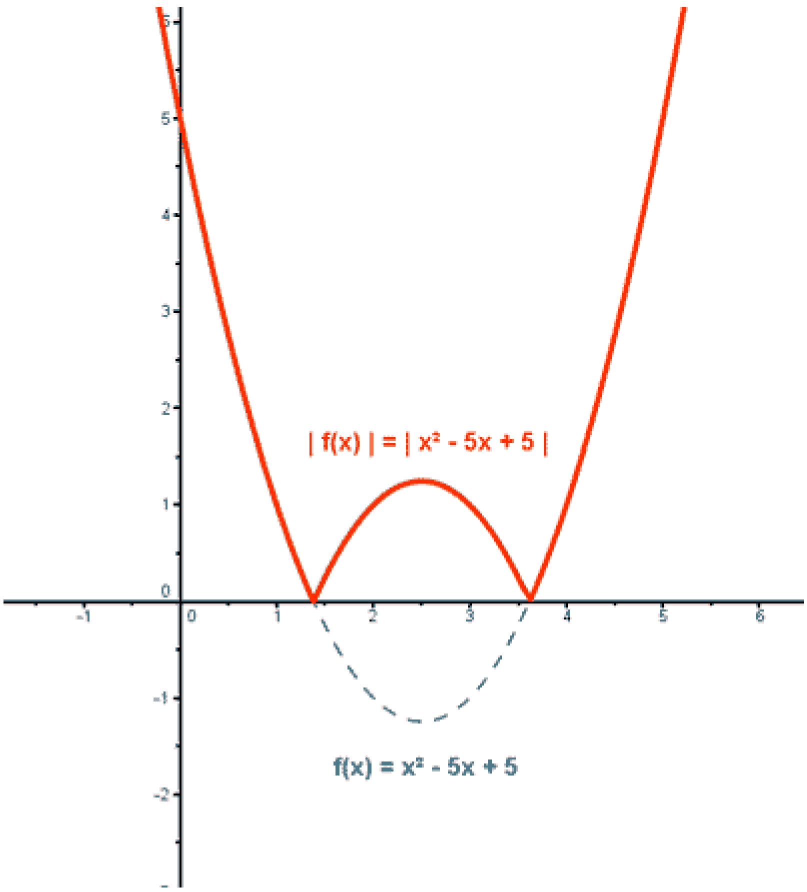
f (0) = 0^2 - 5·0 + 5 = 5

El punto de corte es: (0, 5)

Para que f(x) = 0 se tiene que:

x^2 - 5x + 5 = 0, es decir:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \qquad x_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$$



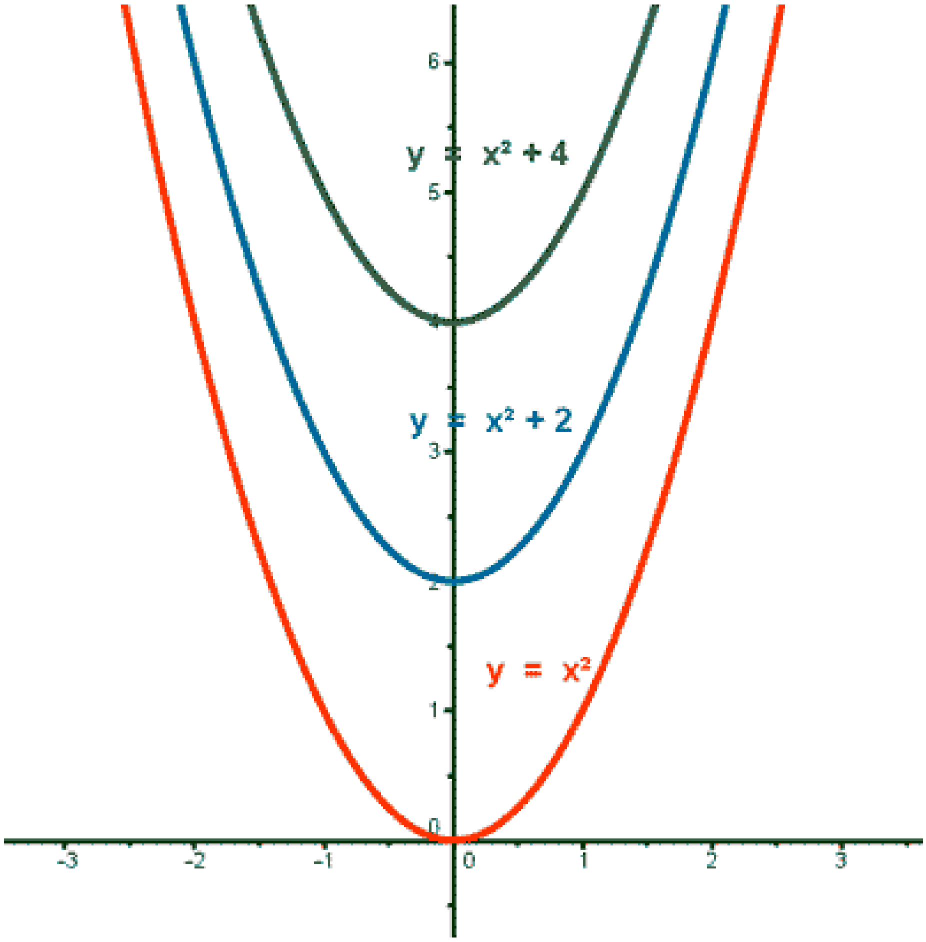
c) Traslaciones verticales y horizontales: $K + f(x)$ y $f(x + K)$

Traslaciones verticales

Trasladar verticalmente K unidades una función f(x) es sumarle a la variable dependiente $y = f(x)$ la constante K.

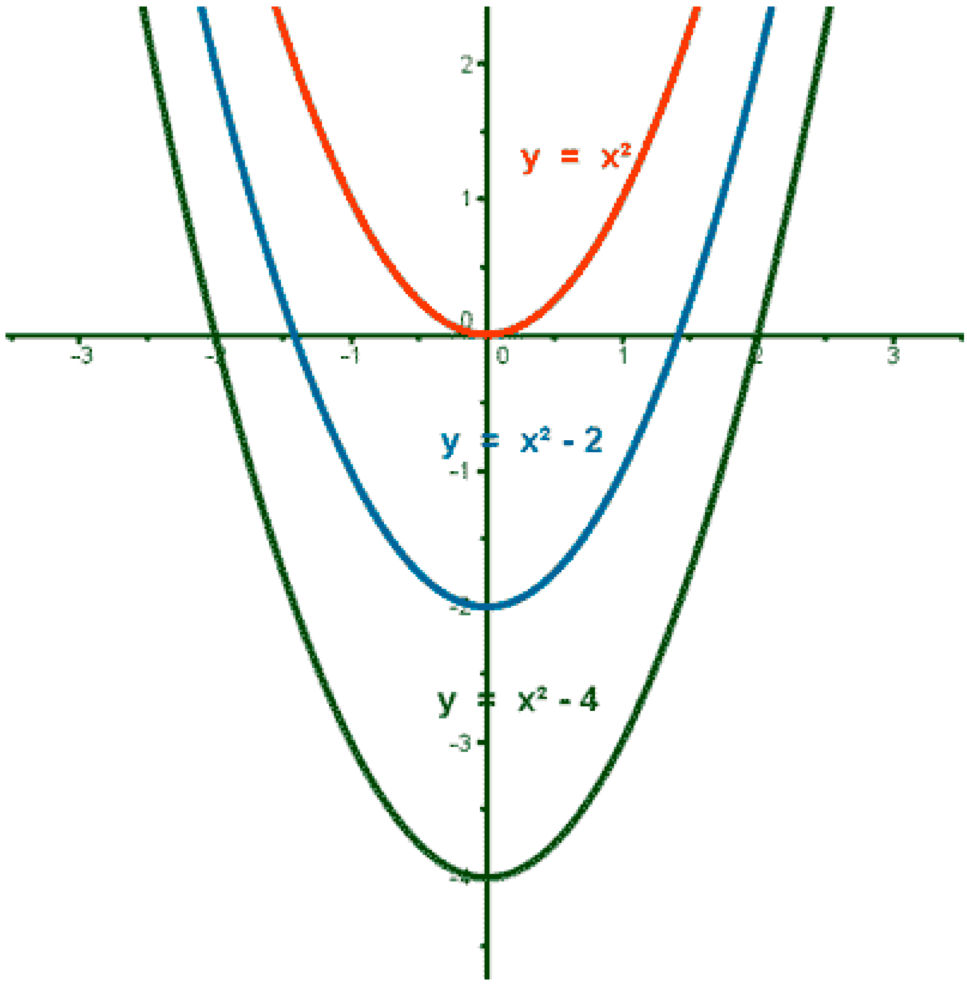
Se obtiene la función $y = f(x) + K$

Si $K > 0$ la función se traslada hacia arriba.
Si $K < 0$ la función se traslada hacia abajo.



Para $K > 0$: $K_1 = 2$ y $K_2 = 4$

(Se traslada hacia arriba)



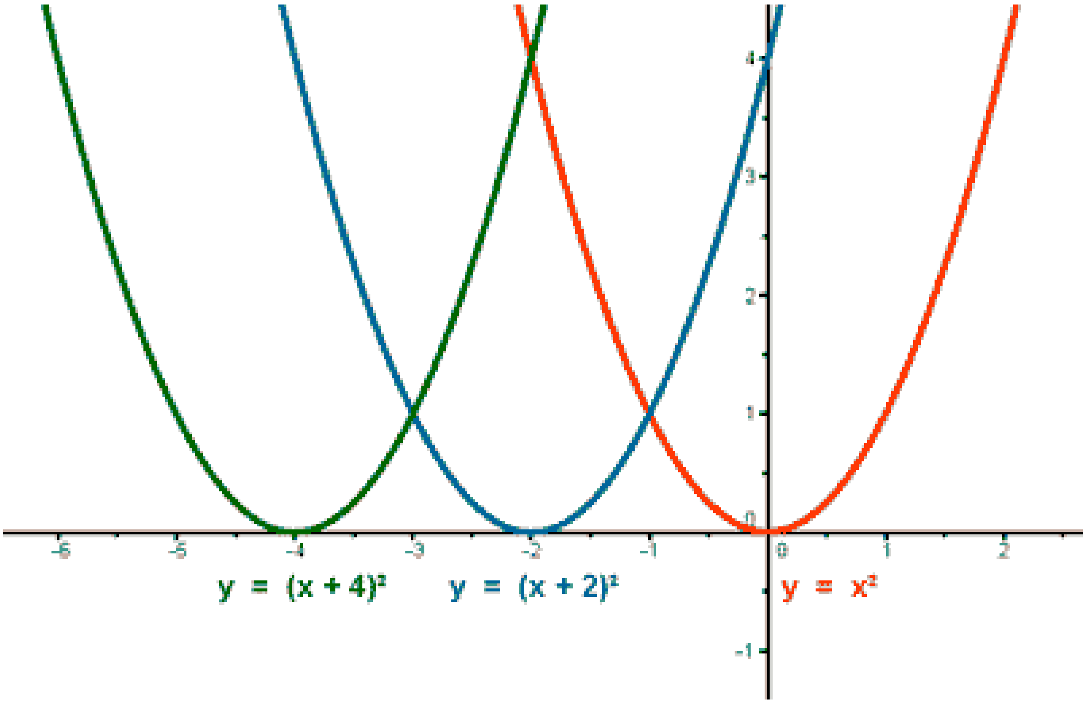
Para K < 0: **K_1 = - 2** y **K_2 = - 4**

(Se traslada hacia abajo)

Traslaciones horizontales

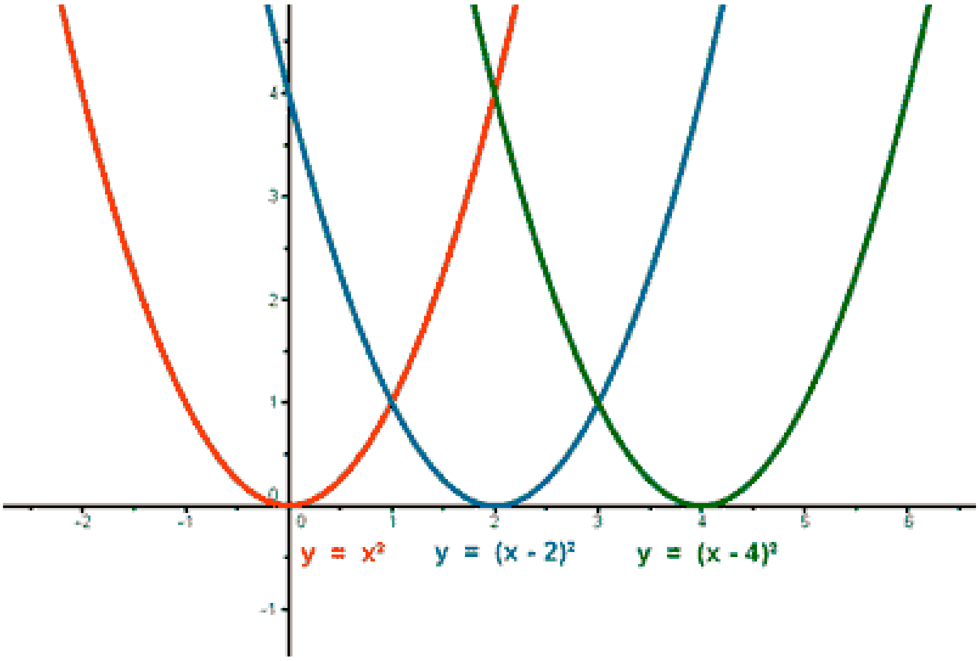
Trasladar horizontalmente K unidades una función f(x) es restarle a la variable independiente x la constante K.

Se obtiene la función $y = f(x + K)$
Si $K > 0$ la función se traslada hacia la izquierda.
Si $K < 0$ la función se traslada hacia derecha.



Para $K > 0$: $K_1 = 2$ y $K_2 = 4$

(Se traslada a la izquierda)



Para K < 0: $K_1 = -2$ y $K_2 = -4$

(Se traslada a la derecha)

Resumen de traslaciones:

Gráfica original...: $y = f(x)$

Traslación horizontal de k unidades a la derecha....................: $y = f(x - k)$

Traslación horizontal de k unidades a la izquierda...................: $y = f(x + k)$

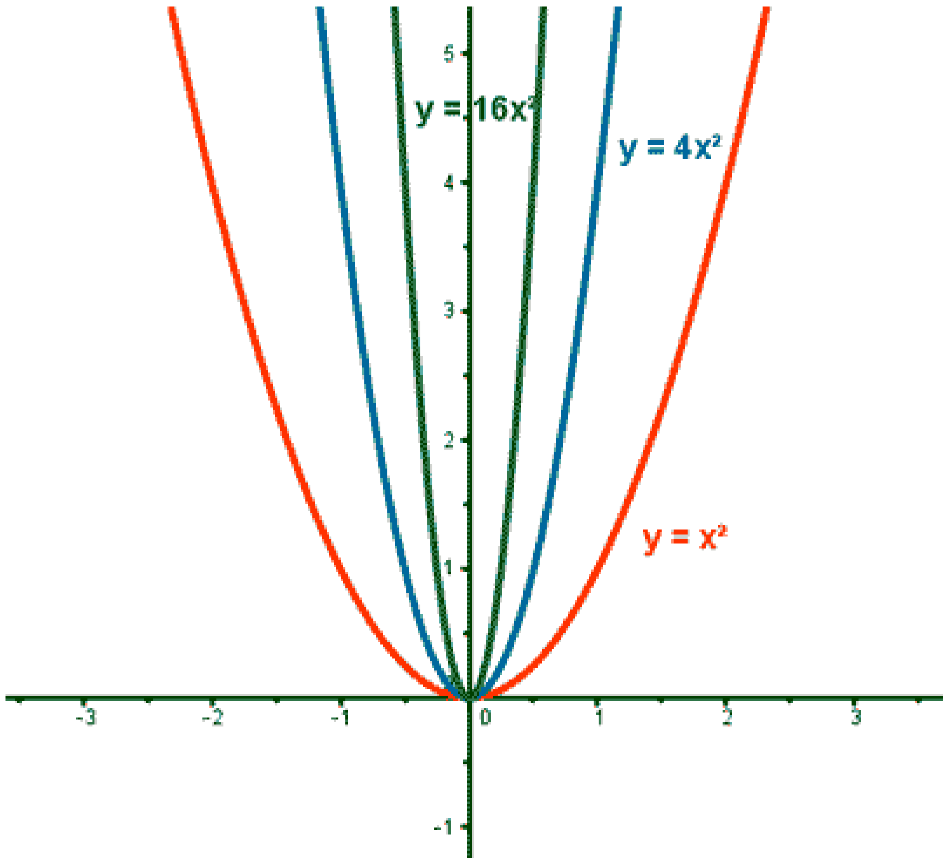
Traslación vertical de k unidades hacia abajo..........................: $y = f(x) - k$

Traslación horizontal de k unidades hacia arriba.....................: $y = f(x) + k$

d) Dilataciones y contracciones: K•f(x) y f (K•x)

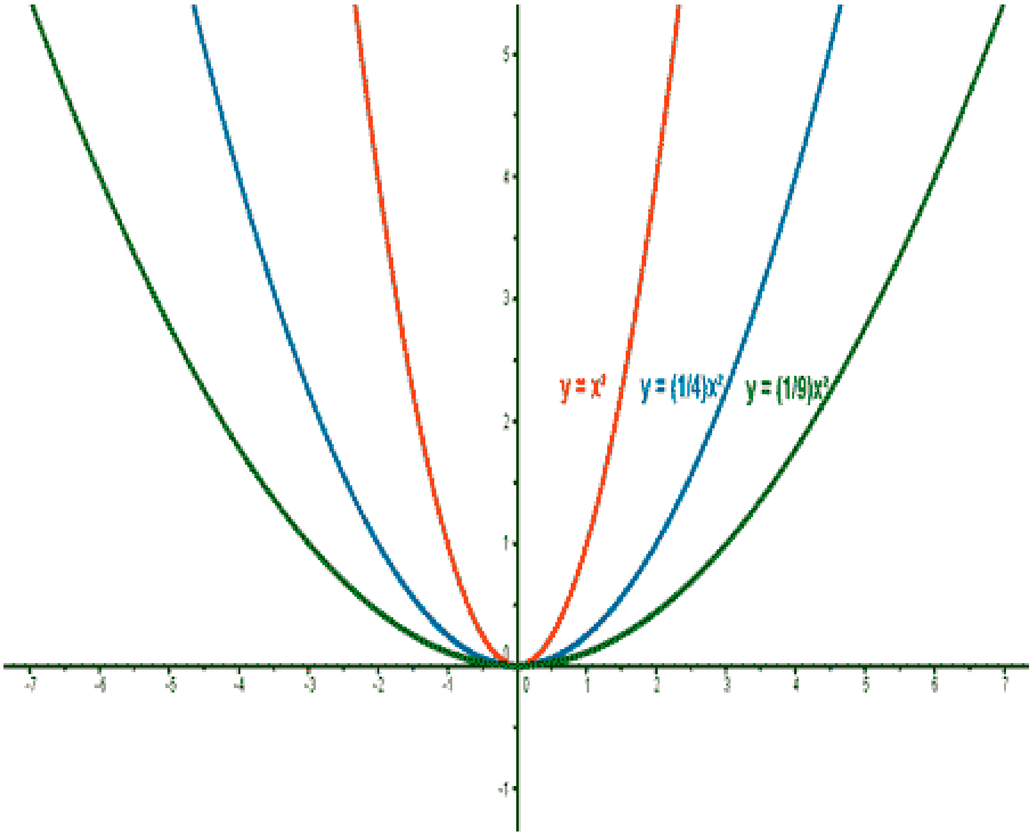
La función f (K·x) contrae o dilata la función f(x).

Si K > 1 se contrae y si 0 < K < 1 se dilata.



Para K > 0: **$K_1 = 2$** y **$K_2 = 4$**

(Se contrae)

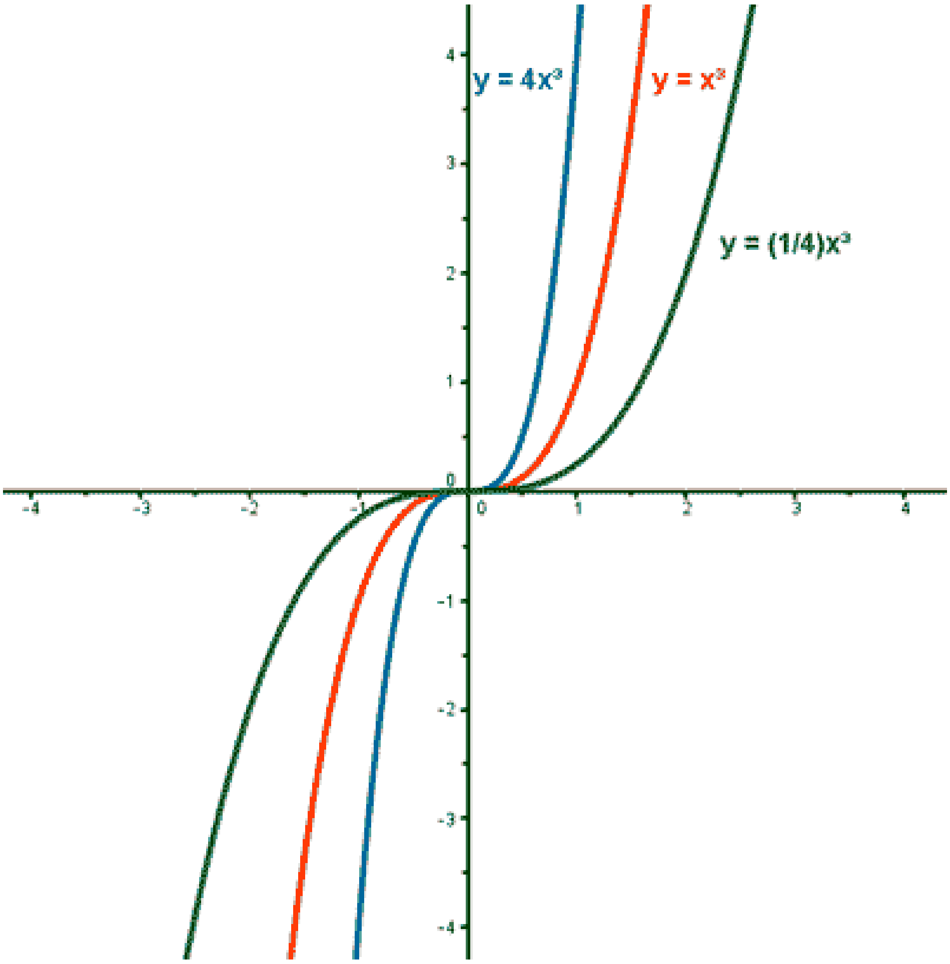


Para 0 < K < 1: **$K_1 = 1/2$** y **$K_2 = 1/3$**

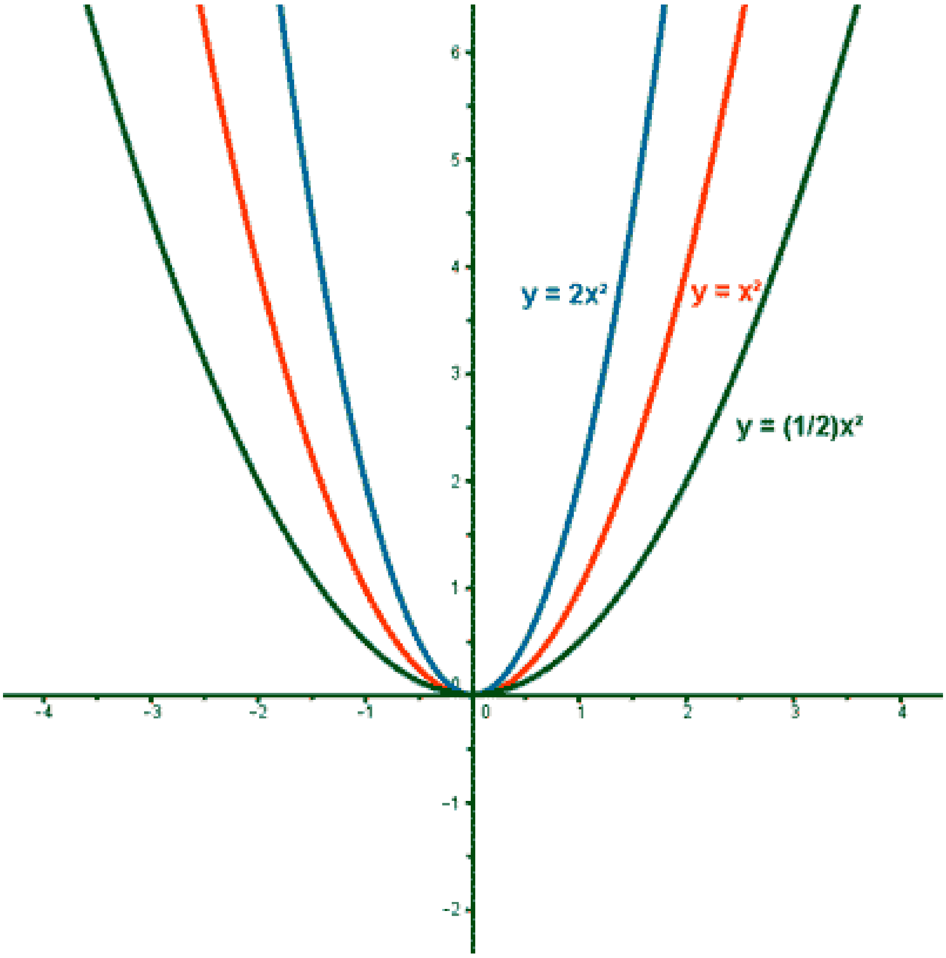
(Se dilata)

La función k·f(x)

La función K•f(x) multiplica por K todos los resultados de f(x).



Para $K_1 = 2$ y $K_2 = 1/2$



Para $K_1 = 2$ y $K_2 = 1/2$

14. OPERACIONES CON FUNCIONES

Sean f y g dos funciones reales de variable real y de dominios Dom (f) y Dom (g), respectivamente.

Suma de funciones

Llamamos suma de f y g, a una operación real que denominamos (f + g) tal que:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ para todo } x \in [\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)]$$

Llamamos función nula o función cero a aquella función que asigna a cualquier elemento del dominio el valor 0 como imagen. La expresamos por 0.

Se verifica que:

$$(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$$

Por tanto, la función nula es el elemento neutro para la suma de funciones.

Dada una función f definida en D, llamamos función opuesta de f, y la expresamos por - f, a la función:

$$\begin{aligned} -f:\ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (-f)(x) = -f(x) \end{aligned}$$

La función opuesta verifica que para toda función f se cumple que:

$$f + (-f) = (-f) + f = 0$$

La función opuesta es el elemento opuesto para la suma de funciones.

Ejemplos de suma de funciones

Dadas las funciones f y g, vamos a hallar (f + g):

a) $f(x) = x - 5 \quad ; \qquad g(x) = \dfrac{5}{x+1}$

$$(f+g)\,(x) = f(x) + g(x) = x - 5 + \frac{5}{x+1} = \frac{(x-5)(x+1)+5}{x+1} = \frac{x^2 - 4x}{x+1}$$

Como Dom (f) = R y Dom (g) = R - {1}, tenemos que:

Dom (f + g) = Dom (f) ∩ Dom (g) = R ∩ [R - {1}] = R - {1}

b) $f(x) = \sqrt{x - 9} \quad ; \qquad g(x) = \sqrt{5 - x}$

Veamos si es posible efectuar la suma de estas funciones.

Como Dom (f) = [9, ∞) y Dom (g) = (-∞, 5], tenemos que:

Dom (f + g) = Dom (f) ∩ Dom (g) = [9, ∞) ∩ (-∞, 5] = ∅

No hay ningún elemento que pertenezca a la intersección de los dominios de f y g, por lo que no existe f + g.

Producto de funciones

Llamamos producto de f por g, y lo expresamos por (f • g), a la función:

(f • g)(x) = f(x) • g(x), para todo x ∈ [Dom (f) ∩Dom (g)]

Llamamos función unidad, y la expresamos por 1, a aquella función que a cada número real le asigna el número real 1.

Se verifica que:

(f · 1)(x) = f(x) · 1(x) = f(x)

La función unidad el elementó neutro para el producto de funciones.

Dada una función f de dominio D, tal que $f(x) \neq 0$ para todo valor x de D, llamamos función recíproca de f**,** y la expresamos por 1/f, a la función:

$$\begin{aligned} 1/f:\ D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (1/f)(x) = 1/f(x) \end{aligned}$$

La función recíproca es el elemento inverso para el producto de funciones.

Si f es una función que se anula en algún punto de su dominio D, el dominio de 1/f es:

$$\text{Dom}\,(1/f) = D - \{x \in D \ / \ f(x) = 0\}$$

Ejemplo de producto de funciones

Dadas las funciones f y g, vamos a hallar (f · g):

$$f(x) = \sqrt{x - 3} \quad ; \quad g(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$(f \cdot g)\,(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-3} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$$

Como Dom (f) = [3, ∞) y Dom (g) = R - {-2}, tenemos que:

$$\text{Dom}\,(f \cdot g) = \text{Dom}\,(f) \cap \text{Dom}\,(g) = [3, \infty) \cap R - \{-2\} = [3, \infty)$$

Ejemplo de función recíproca

Vamos a hallar la función recíproca de f, donde f es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Hacemos (1/f) (x):

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > -1 \ \text{ y } \ x \neq 0 \end{cases}$$

Vemos que: Dom (f) = R

Y además f(x) = 0 solamente si x = 0. Luego: {x ∈ R / f(x) = 0} = {0}

Por tanto el dominio de la función recíproca de f es:

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{1}{f}\right) = \mathrm{Dom}(f) - \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Cociente de funciones

Llamamos cociente de f y g a otra función real que denominamos por f/g, tal que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{, para todo} \quad x \in [\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)] - \{x \ / \ g(x) = 0\}$$

Ejemplo de cociente de funciones

Dadas las funciones f y g, vamos a hallar (f/g):

$$f(x) = \sqrt{x - 2} \quad ; \qquad g(x) = \frac{x - 5}{x + 3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x - 2}}{\frac{x - 5}{x + 3}} = \frac{\sqrt{x - 2} \cdot (x + 3)}{x - 5}$$

Observamos que g(x) = 0 solamente si x = 5. Luego: {x / g(x) = 0} = {5}

Como Dom (f) = [2, ∞) y Dom (g) = R - {-3}, tenemos que:

Dom (f / g) = [Dom (f) ∩ Dom (g)] - {x / g(x) = 0} = [[2, ∞) ∩ R - {-3}] - {5} = [2, ∞) - {5}

15. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones reales de variable real y de dominios Dom(f) y Dom(g) respectivamente, y tales que f(Dom(f)) ⊆ Dom(g).

Llamamos función compuesta de f con g a la función:

$$
\begin{aligned}
g \circ f :\ & \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R} \\
& x \longrightarrow (g \circ f)(x) = g[\, f(x)\,]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(x) \arrow[r, "g"] & g[\, f(x)\,]
\end{tikzcd}
$$

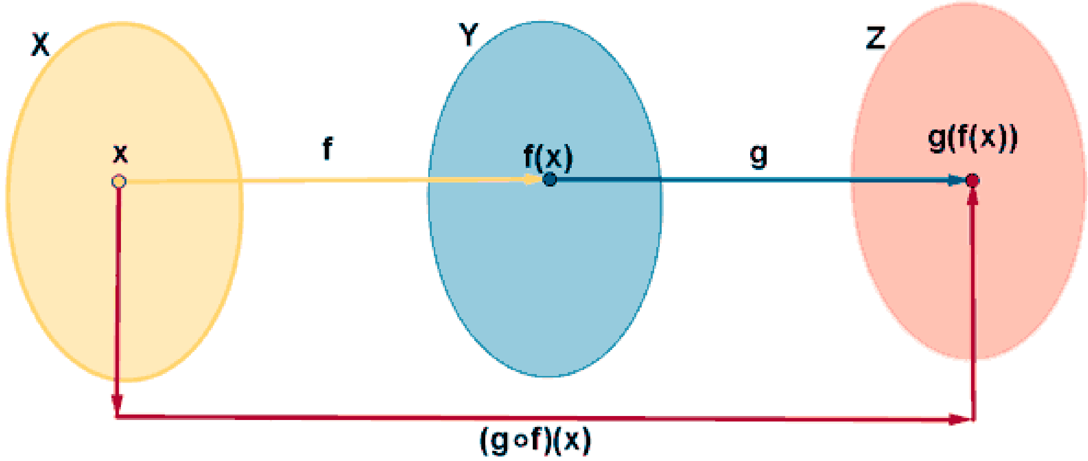
La expresión (g o f) (x) se lee como f compuesta con g de x. Para nombrarla, se comienza por la función de la derecha, porque es la primera que actúa sobre la variable x.

En general, (g o f) (x) es distinto que (f o g) (x). Es decir, la composición de funciones no cumple la propiedad conmutativa.

La condición f(Dom(f)) ⊆ Dom(g) es necesaria para calcular la función (g o f), ya que si hubiese un valor $x_0 \in$ Dom(f) tal que $f(x_0) \notin$ Dom(g), entonces g[f(x)] no existiría y (g o f) no estaría definida para x_0.

Por tanto, el dominio máximo de la función compuesta (g o f) será Dom (f), pero puede ser un subconjunto suyo, es decir:

Dom (g o f) ⊆ Dom (f)



Ejemplos de composición de funciones

Dadas las funciones f(x) = $2x^2$ - 1 y g(x) = 3x + 2, vamos a calcular el valor de las funciones compuestas:

a) $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g\left[f(x)\right] = g\left[\,2x^2 - 1\right] = 3\left(2x^2 - 1\right) + 2 = 6x^2 - 3 + 2 = 6x^2 - 1$$

b) $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f[\,3x+2] = 2(3x+2)^2 - 1 =$$
$$= 2\left(9x^2 + 12x + 4\right) - 1 = 18x^2 + 24x + 8 - 1 = 18x^2 + 24x + 7$$

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

c) $(g \circ f)(1)$

$$(g \circ f)(1) = g\left[f(1)\right] = g\left[\,2\cdot 1^2 - 1\right] = g[1] = 3\cdot 1 + 2 = 5$$

d) $(f \circ g)(1)$

$$(f \circ g)(1) = f\left[g(1)\right] = f[\,3\cdot 1 + 2] = f[5] = 2\cdot 5^2 - 1 = 49$$

Función identidad

Llamamos función identidad, y la expresamos por Id, a la función que transforma todo número real en sí mismo.

Id(x) = x , para todo $x \in R$

La función identidad verifica que para cualquier función f se tiene:

$$f \circ Id = Id \circ f = f$$

Por tanto, la función identidad es el elemento neutro para la composición de funciones. La representación gráfica de la función identidad, es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrantes: y = x

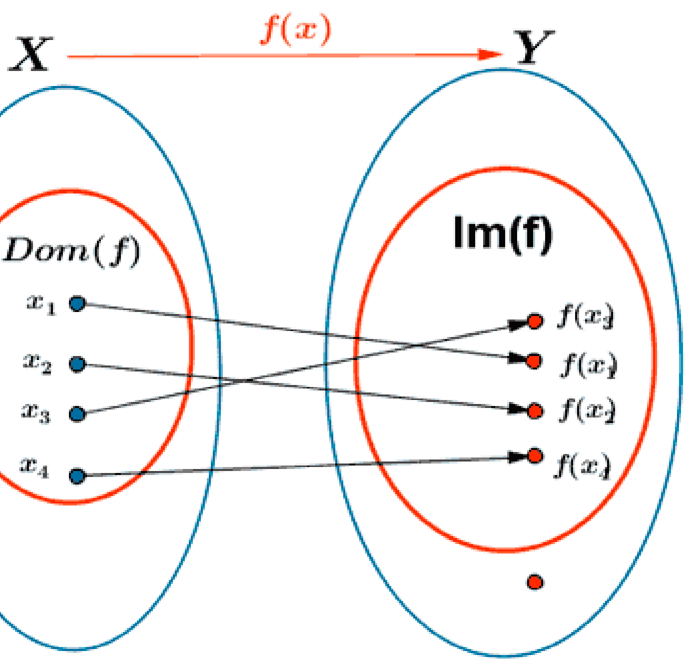
16. FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA Y BIYECTIVA.

Función inyectiva

Una función f de dominio D = Dom (f) es inyectiva cuando a elementos distintos de D le corresponden imágenes distintas:

Si x1, x2 ∈ D: x1 ≠ x2 ⇒ f(x1) ≠ f(x2)

Dos elementos distintos del dominio D no pueden tener la misma imagen.



Ejemplo de función inyectiva

a) Veamos si la función f(x) = 4x - 1 es inyectiva:

Si las imágenes son iguales:

$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 4x_1 - 1 = 4x_2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 4x_1 = 4x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$

Los originales son iguales.

Por tanto, la función f es inyectiva.
Criterio de la recta horizontal una función es inyectiva si ninguna recta horizontal corta a su gráfica en más de un punto.

b) Veamos si $g(x) = x^2$ es inyectiva:

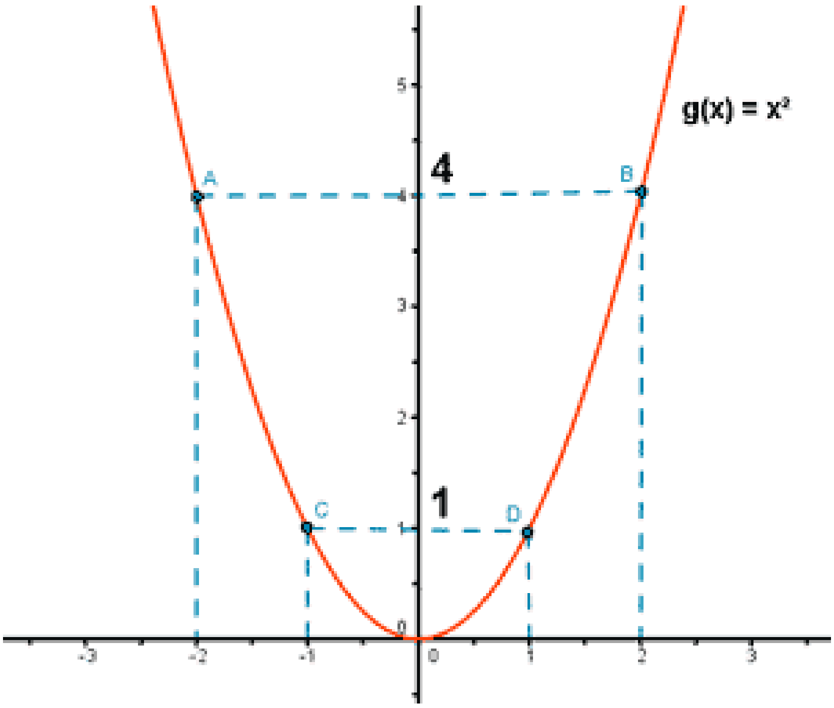
Si trazamos rectas horizontales sobre la gráfica, estas la corta en más de un punto.

Por ejemplo: si trazamos la recta $y = 4$: ésta corta la función en los puntos: $x = 2$, $x = -2$

$$g(2) = 4 \quad , \quad g(-2) = 4$$

Por tanto, dos elementos distintos, 2 y - 2, tienen la misma imagen.

La función g no es inyectiva.



c) Veamos si $h(x) = \text{sen } x$ es inyectiva:

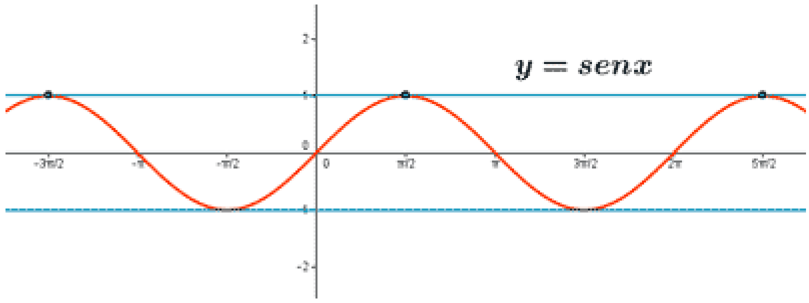
Si trazamos rectas horizontales sobre la gráfica, estas la corta en más de un punto.

Por ejemplo: si trazamos la recta $y = 1$: ésta corta la función en los puntos: $x = \pi/2$, $-3\pi/2$

$$h(\pi/2) = 1 \quad , \quad h(-3\pi/2) = 1$$

Por tanto, dos elementos distintos, $\pi/2$ y $-3\pi/2$, tienen la misma imagen.

La función h no es inyectiva.

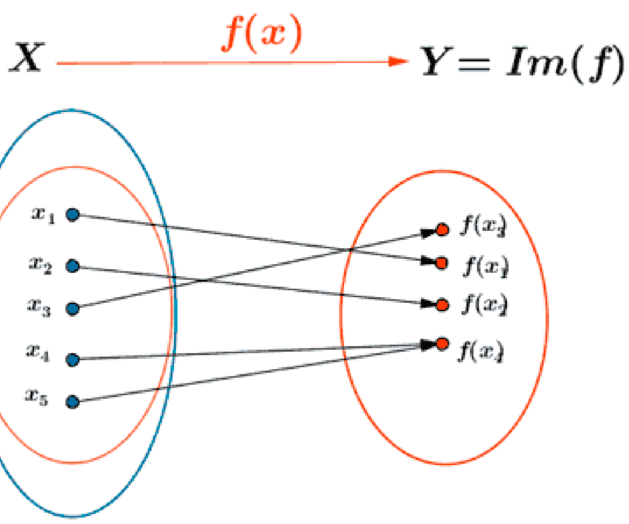


Función sobreyectiva

Una función $f: X \rightarrow Y$ es una función sobreyectiva si:

$$Im(f) = Y$$

Esto significa que todo elemento $y \in Y$ es la imagen de al menos un elemento $x \in A$. Es decir, la imagen de f coincide con el conjunto final.



Ejemplo de función sobreyectiva

a) Veamos si la función f: R → R, donde $f(x) = x^2 + 1$, es sobreyectiva:

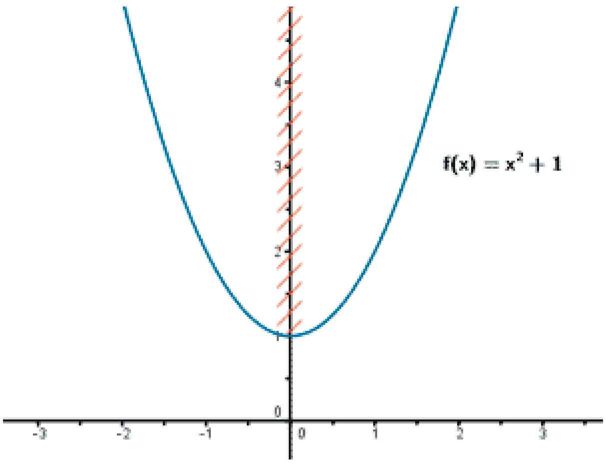
En este caso:

El conjunto inicial de f es R.

El conjunto final de f es: R

La imagen de f es [1, ∞), es decir: Im (f) = [1, ∞)

La imagen de f y el conjunto final de f no coinciden:
Véase la parte rayada del eje OY**.** No coincide con todo R
Luego la función f no es sobreyectiva.



b) Veamos si la función g: R → R, donde $g(x) = x^3 + 3$, es sobreyectiva:

En este caso:

El conjunto inicial de g es R.

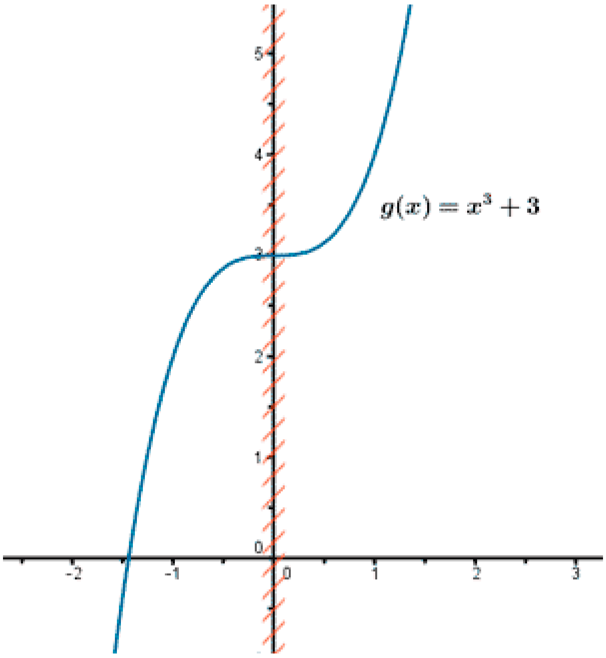
El conjunto final de g es**:** R

La imagen de g es también R, es decir**:** Im (g) = R

La imagen de g y el conjunto final de g coinciden es R:

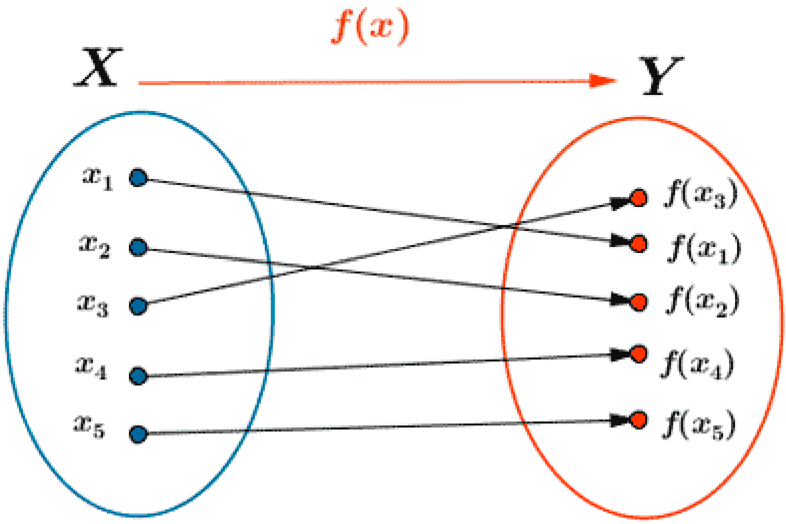
Véase la parte rayada del eje OY. Coincide con todo R

Luego la función g sí es sobreyectiva.



Función biyectiva

Una función f es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.



Ejemplo de función biyectiva

a) Veamos si la función f: R → R, donde $f(x) = 3x - 2$, es biyectiva.

Veamos primero si es inyectiva,

Si las imágenes son iguales:

$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 3x_1 - 2 = 3x_2 - 2 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 3x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$

, los originales son iguales.

Por tanto, la función f es inyectiva.

Veamos ahora si es sobreyectiva:

El conjunto inicial de f es R.

El conjunto final de f es: R

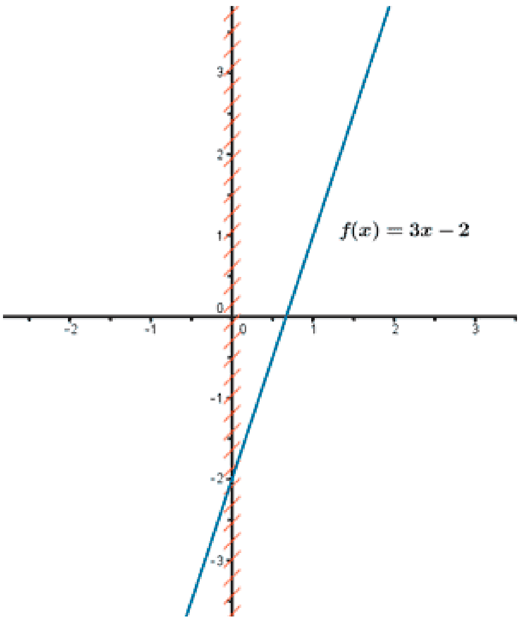
La imagen de f es también R, es decir: Im (f) = R

La imagen de f y el conjunto final de f coinciden: R**:**

Véase la parte rayada del eje OY**.** Coincide con todo R

Luego la función f sí es sobreyectiva.

Por tanto, la función f es biyectiva.



b) Veamos si la función g: R → R, donde $g(x) = x^2$, es biyectiva.

La función f es una función par, es decir: f(x) = f (-x).

Por tanto no es inyectiva, pues dos valores distintos, x, -x, tiene imágenes iguales.

Luego f no puede ser biyectiva.

c) Dada la siguiente función h, vamos a ver si es biyectiva

$$\mathbf{h}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{2} - \mathbf{x}}$$

Veamos primero si es inyectiva,

Si las imágenes son iguales:

$$\mathbf{h}(x_1) = \mathbf{h}(x_2) \iff \sqrt{2 - x_1} = \sqrt{2 - x_2} \iff$$

$$\iff 2 - x_1 = 2 - x_2 \iff x_1 = x_2$$

, los originales son iguales.

Por tanto, la función h es inyectiva.

Veamos ahora si es sobreyectiva:

El conjunto inicial es: R

El conjunto final es: R

Calculamos el recorrido:

$$\sqrt{2 - x} = y \iff 2 - x = y^2 \iff x = 2 - y^2$$

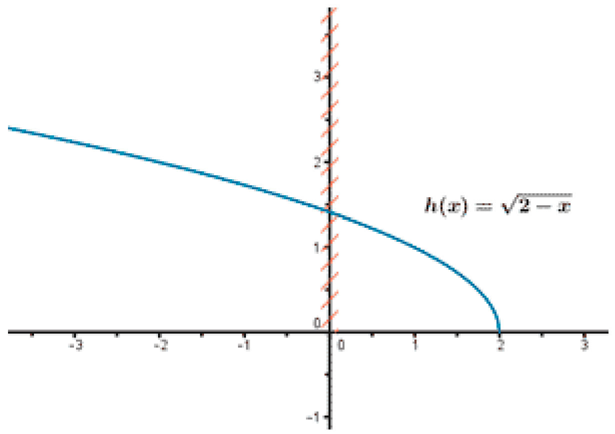
Im (f) = [0, ∞)

[0, ∞) ≠ R:

Véase la parte rayada del eje OY**.** No coincide con todo R

Luego la función h no es sobreyectiva.

Por tanto, la función h no es biyectiva.



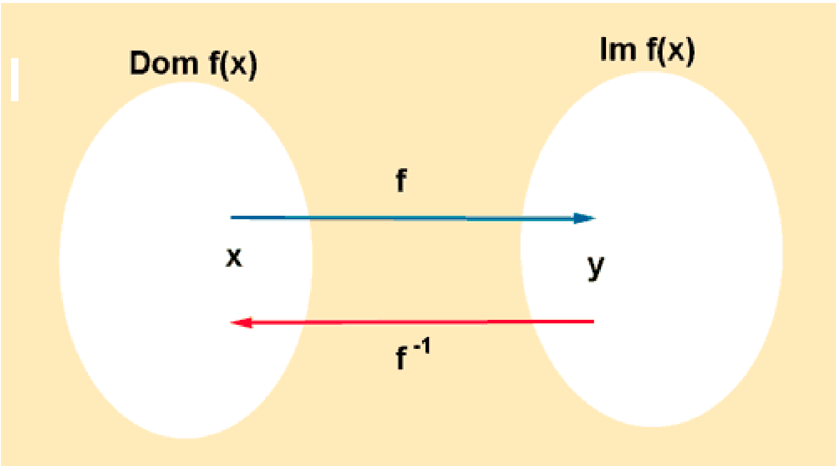
17. FUNCIÓN INVERSA

Sea una función f de dominio Dom (f); si f es inyectiva, entonces f tiene función inversa, que expresamos por f -1, y que está definida por:

$$f^{-1}: \ \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Dom}(f)$$
$$y \longrightarrow f^{-1}(y) = x \ , \quad \text{con } f(x) = y$$

Observa que para la función inversa se cumple que:

Dom (f^{-1}) = Im (f) y que Im (f^{-1}) = Dom (f)



Una función y su inversa verifican las siguientes propiedades:

- $f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = \mathbf{x}$

- Las gráficas de f y de f^{-1}, referidas al mismo sistema de coordenadas, son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

Hallar la inversa de una función f(x)

Para hallar la inversa de una función f debemos seguir los siguientes pasos:

1. Ver si f es inyectiva.
2. Despejar la variable x de la ecuación: y = f(x)
3. Intercambiar las variables x e y para obtener $f^{-1}(x)$

Ejemplo de hallar la inversa de una función

Dada una función f, vamos a hallar su función inversa:

a) f(x) = 3x + 2

Primero vemos si es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 3x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

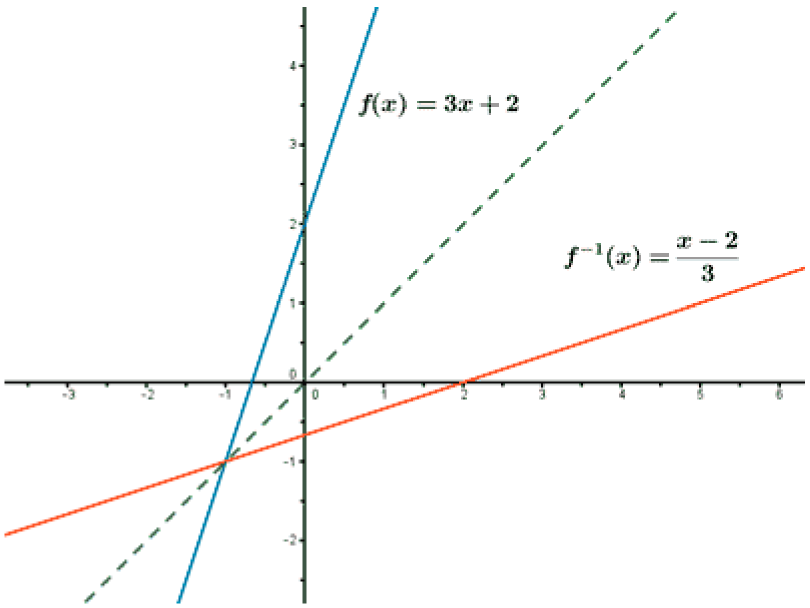
Luego sí es inyectiva.

En segundo lugar, despejamos la variable x de la ecuación: y = f(x)

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2 = y \quad \Leftrightarrow \quad 3x = y - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y-2}{3}$$

Por último, intercambiamos las variables:

$$x = \frac{y-2}{3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x-2}{3} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$



b) $\mathbf{f(x) = x^2}$

Esta función no es inyectiva: $f(-2) = f(2) = 4$, dos elementos distintos tienen la misma imagen.

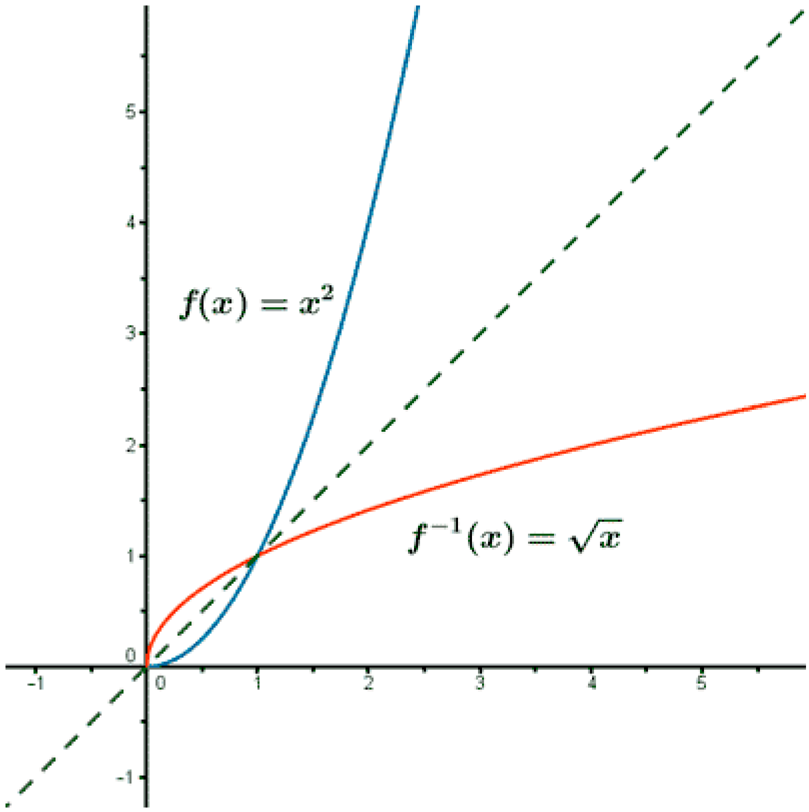
Para valores reales positivos de la función podemos obtener su inversa:

$$f(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y \quad \Leftrightarrow \quad x = +\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = +\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) = +\sqrt{x}$$

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longrightarrow & +\sqrt{x} \end{array}$$

La función inversa presenta restricciones: las funciones $f(x) = x^2$ y $f(x) = +\sqrt{x}$

Son funciones inversa sólo si las consideramos en el intervalo $[0, \infty)$



Si no hubiésemos puesto la condición $x > 0$ tendríamos que la inversa de $f(x) = x^2$ sería $f^{-1} = \pm\sqrt{x}$, que no es función.

Imagen inversa de un número

Para todo y_0 del recorrido de la función f (Im (f)), su imagen inversa $f^{-1}(y_0)$, es el conjunto de los números x del dominio de f (Dom (f)) que se transforman en y_0.

$$f^{-1}(y_0) = \{x \in R \ / \ \ f(x) = y_0\}$$

Para hallar $f^{-1}(y_0)$ se resuelve la ecuación $f(x) = y_0$.

También podemos determinar $f^{-1}(y_0)$ gráficamente trazando la recta horizontal $y = y_0$. Las abscisas correspondientes a los puntos de corte de dicha recta con la gráfica de f(x) forman la imagen inversa de y_0.

Ejemplo de imagen inversa de un número

Vamos a calcular la imagen inversa de 4 y 1 de la función: $f(x) = x^2$

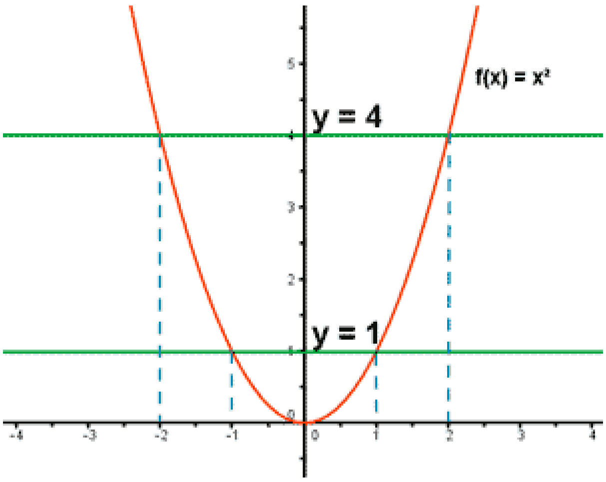
$f^{-1}(4) = \{x \in R /\ f(x) = 4\} = \{x \in R /\ x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$

$f^{-1}(1) = \{x \in R /\ f(x) = 1\} = \{x \in R /\ x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$

Para hallar las imágenes inversas trazamos las rectas: $y = 4$, $y = 1$

La abscisas correspondientes a los puntos de corte de ambas rectas con la gráfica:

$f(x) = x^2$ forman la imagen inversa de 4 y 1, respectivamente.



FUNCIONES POLINÓMICAS, RACIONALES E IRRACIONALES

1. Funciones polinómicas.
2. Funciones polinómicas de primer grado.
3. Funciones potenciales.
4. Funciones cuadráticas.
5. Interpolación y extrapolación.
6. Funciones cúbicas.
7. Funciones racionales.
8. Funciones del tipo: k/x^n
9. Funciones del tipo: k$/(x - a)^2$
10. Funciones con radicales.
11. Funciones del tipo: k/ $\sqrt[n]{x}$

FUNCIONES POLINÓMICAS, RACIONALES E IRRACIONALES

1. FUNCIONES POLINÓMICAS

Una función polinómica es aquella que está definida por un polinomio:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2\ x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde a0, a1... an-1, an son números reales que se llaman coeficientes del polinomio y n es el grado del polinomio.

Las características generales de las funciones polinómicas son las siguientes:

1) El dominio de definición es el conjunto de los números reales (R).

2) Son siempre continuas.

3) No tienen asíntotas.

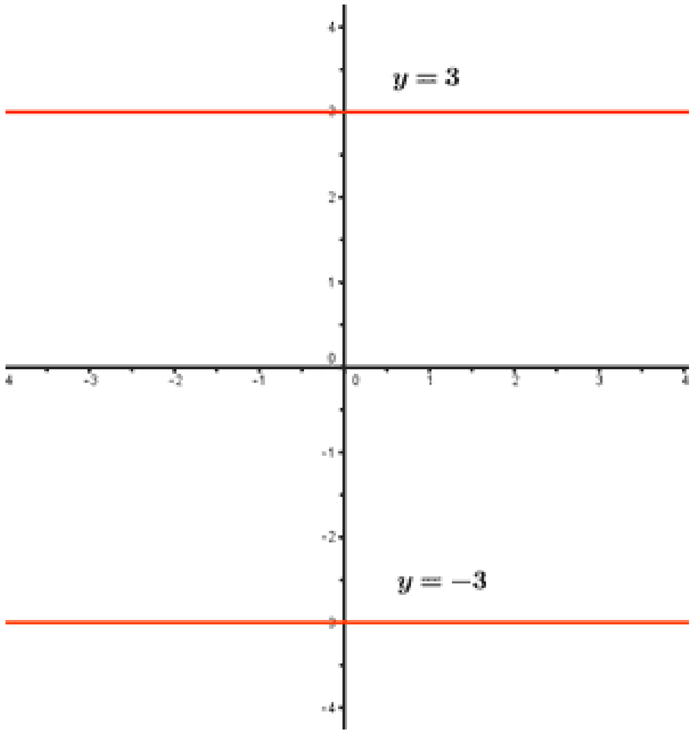
4) Cortan al eje X, como máximo, un número de veces igual que el grado del polinomio.

5) Cortan el eje Y en el punto (0, a_0).

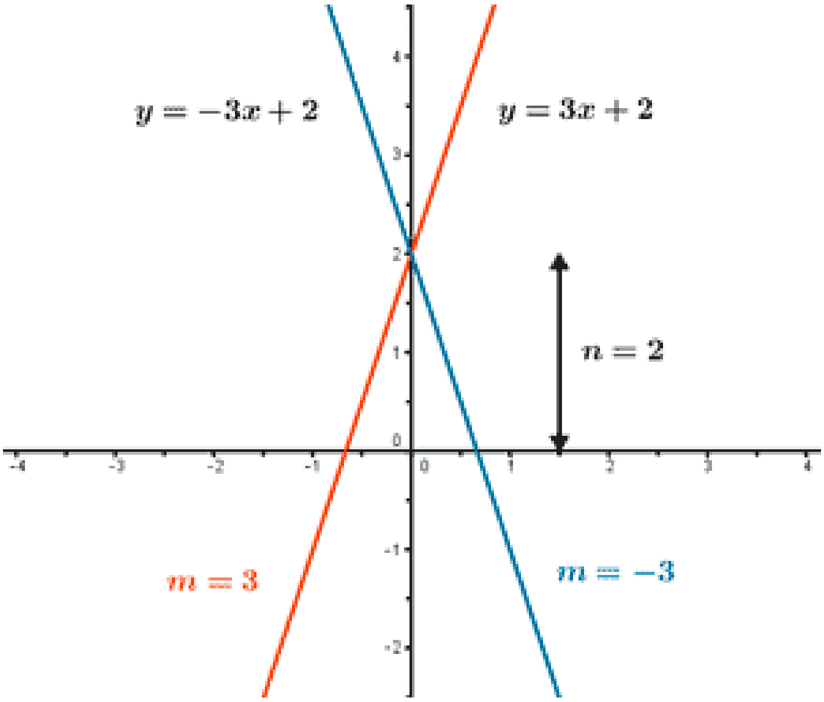
6) El número de máximos y mínimos relativos es, a lo sumo, igual al grado del polinomio menos uno.

7) El número de puntos de inflexión es, a lo sumo, igual al grado del polinomio menos dos.

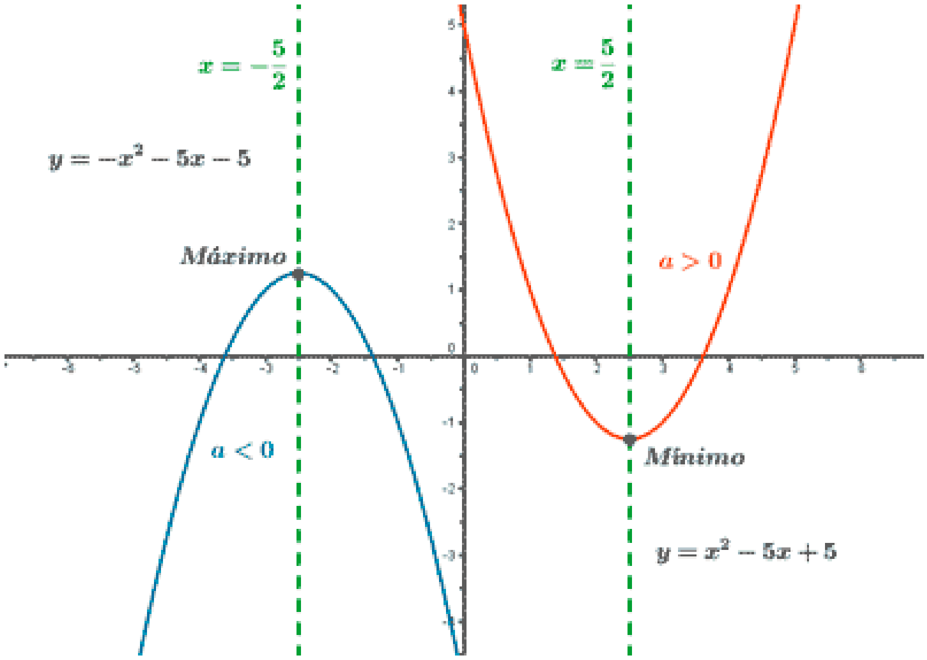
- **Funciones polinómicas de grado 0: rectas horizontales**



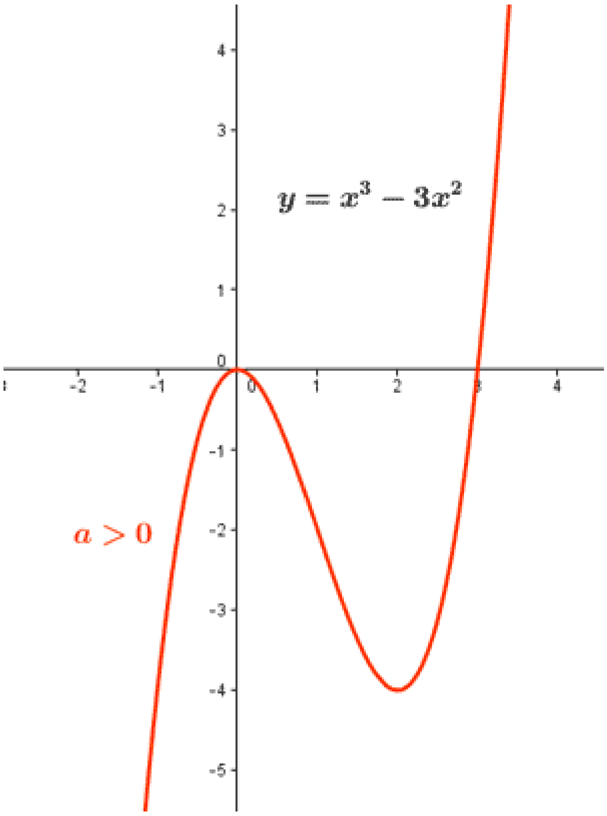
- **Funciones polinómicas de primer grado: rectas oblicuas**

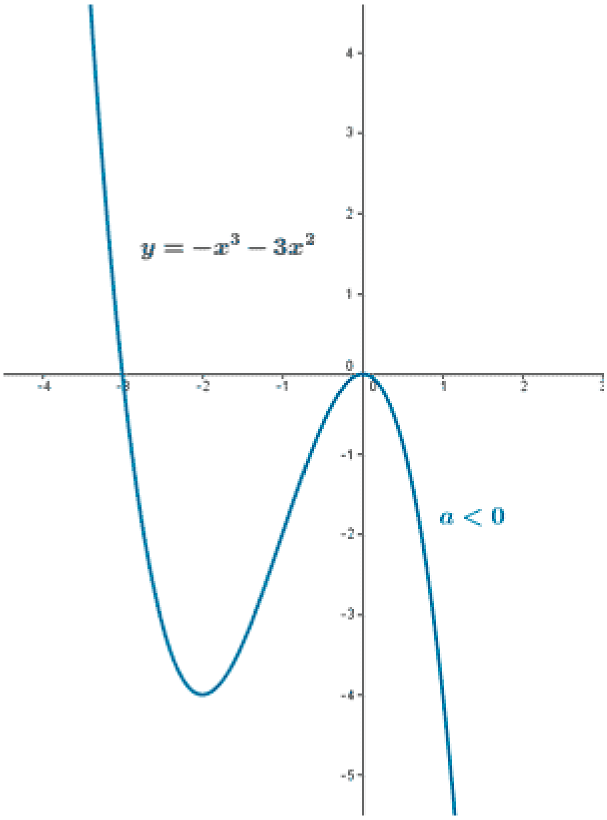


- **Funciones polinómicas de segundo grado: parábolas**

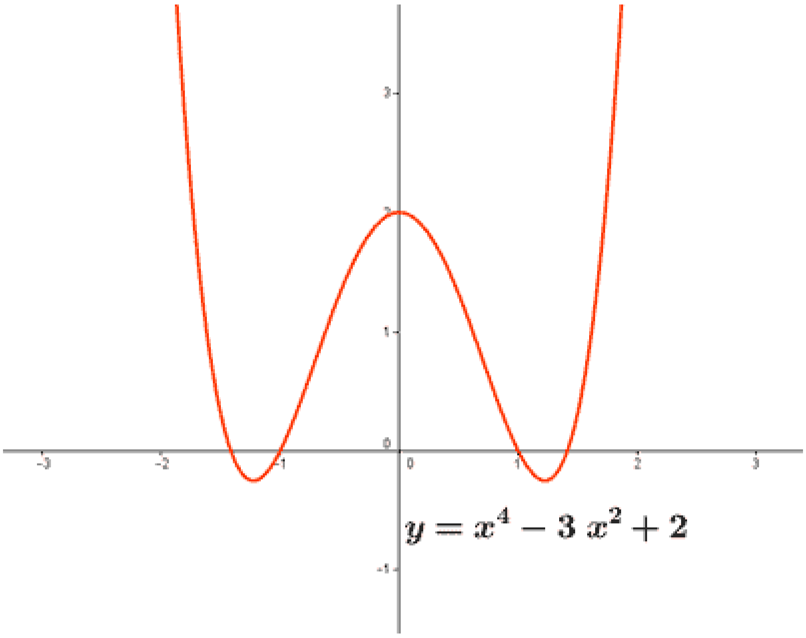


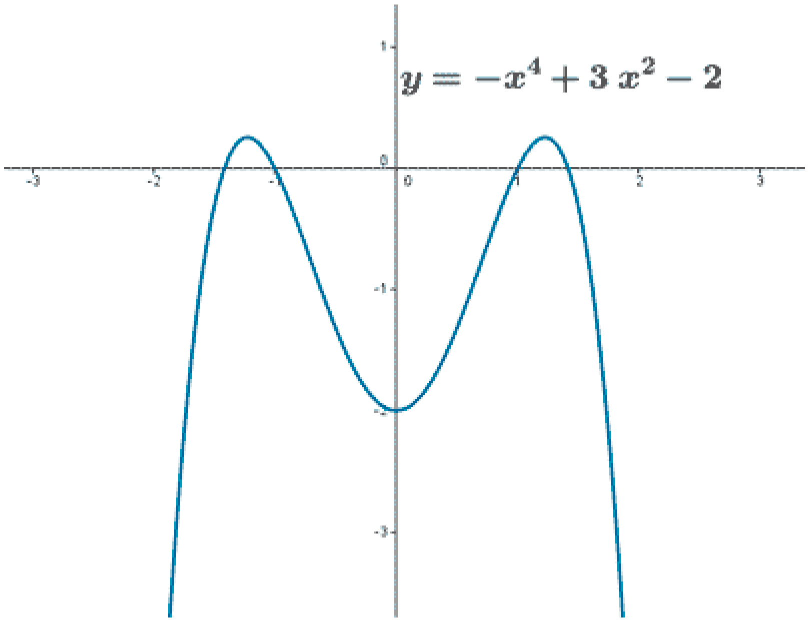
- **Funciones polinómicas de tercer grado: cúbicas**





- **Funciones polinómicas de cuarto grado: cuarticas**





2. FUNCIÓN POLINÓMICA DE PRIMER GRADO O FUNCIÓN AFÍN

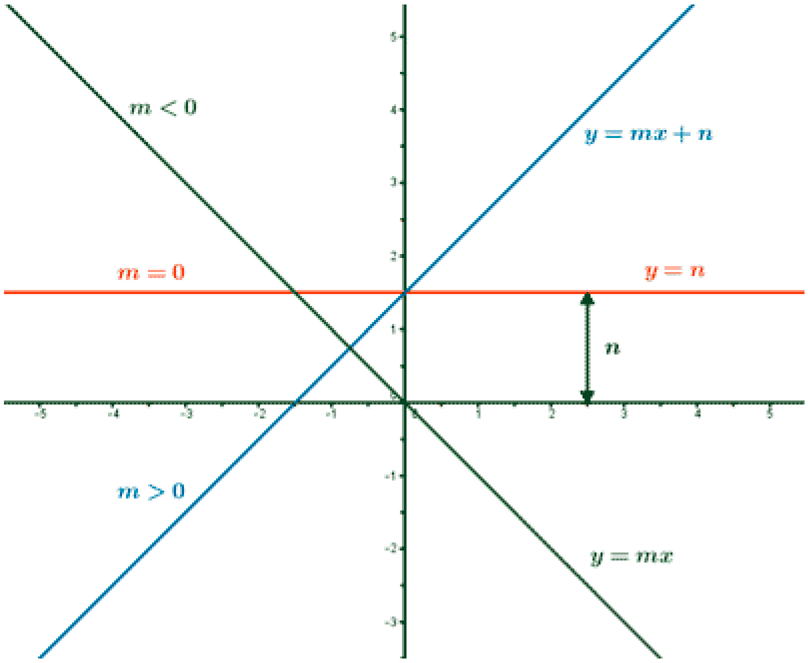
Las funciones polinómicas de primer grado se llaman funciones afines y son del tipo:

$$f(x) = mx + n$$

Donde m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen.

Las características generales de las funciones polinómicas de primer grado son:

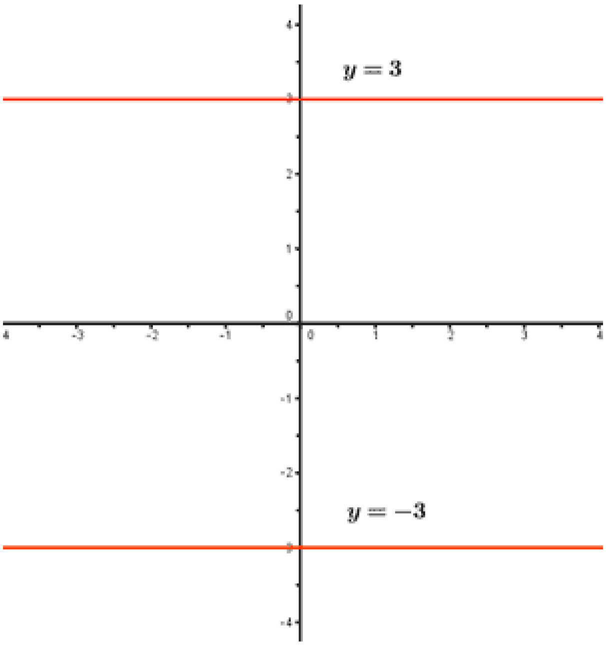
1) Su dominio es el conjunto de los números reales (R).
2) Su gráfica es una recta con pendiente m
3) Corta el eje X en el punto (0, n)
4) Si $m > 0$ la función es creciente.
5) Si $m < 0$ la función es decreciente.
6) No es simétrica ni periódica.
7) No está acotada.



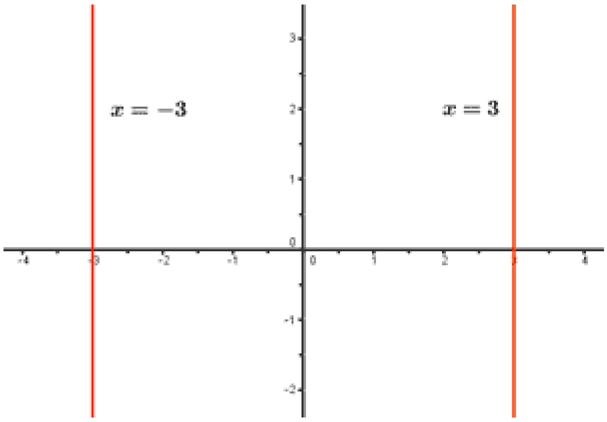
Tipos de funciones afines

- **Función constante**

Si m = 0 la función y = n se denomina función constante y su gráfica es una recta paralela al eje X que pasa por el punto (0, n).



Las funciones $y = 3$ e $y = -3$ son funciones constantes.



$x = k$ es una recta paralela al eje Y.

No es función puesto que para un valor determinado existen infinitas imágenes.

- **Función lineal**

La función $y = mx$ se denomina función lineal y su gráfica es una recta de pendiente m que pasa por el origen de coordenadas: $n = 0$.

La función lineal también se llama **función de proporcionalidad directa.**

$y = mx$ o $y = kx$, donde el valor de la constante k indica la razón de proporcionalidad.

$f(x) = 2x$

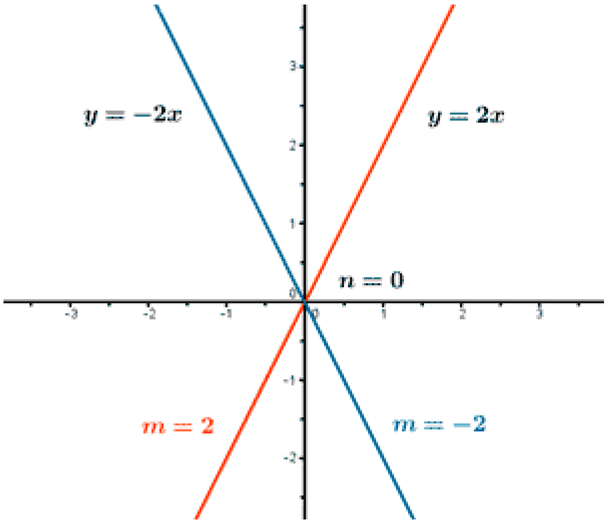
x	0	-1	1
y	0	-2	2

Función creciente ($m > 0$)

$f(x) = -2x$

x	0	-1	1
y	0	2	-2

Función decreciente ($m < 0$)



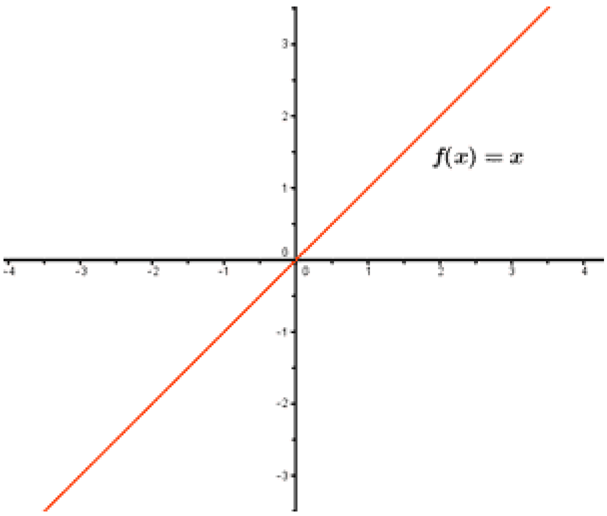
- **Función identidad: f(x) = x**

  La función y = x se denomina función identidad que pasa por el origen de coordenadas: n = 0. Es la recta bisectriz del primer y tercer cuadrante tiene de pendiente m=1 por tanto forma un ángulo de 45º con el eje de abscisas

  m = tg α = 1 α = arctg 1 = 45º = π/2

$f(x) = x$

x	- 1	0	1
y	- 1	0	1



3. FUNCIONES POTENCIALES.

Una función es potencial cuando es de la forma:

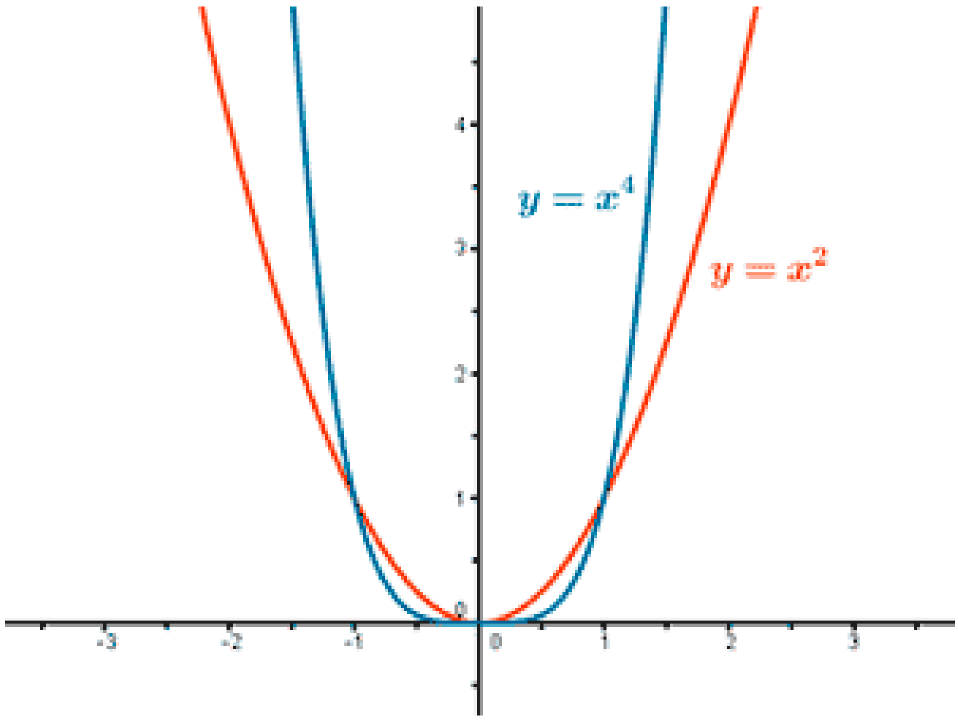
$$y = x^n$$

Donde n es un número natural.

- **Exponente n par**

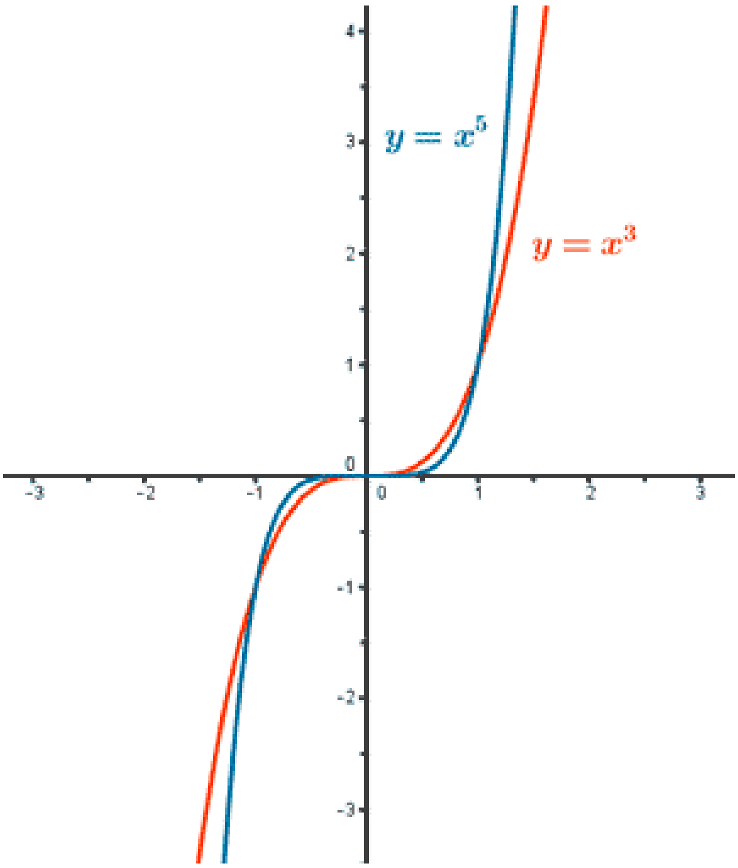
  Si n es par, la función tiene un mínimo en O (0,0) y el recorrido de la función es:

$$Im\ (f) = [0, \infty)$$



- **Exponente n impar**
  Si n es impar, la función tiene un punto de inflexión en O (0,0) y el recorrido de la función es:

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathbb{R}$$



4. FUNCIONES CUADRÁTICAS.

Las funciones polinómicas de segundo grado se llaman funciones cuadráticas y son del tipo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde $a \neq 0$, siendo su gráfica una parábola.

Las características generales de las funciones polinómicas de segundo grado son:

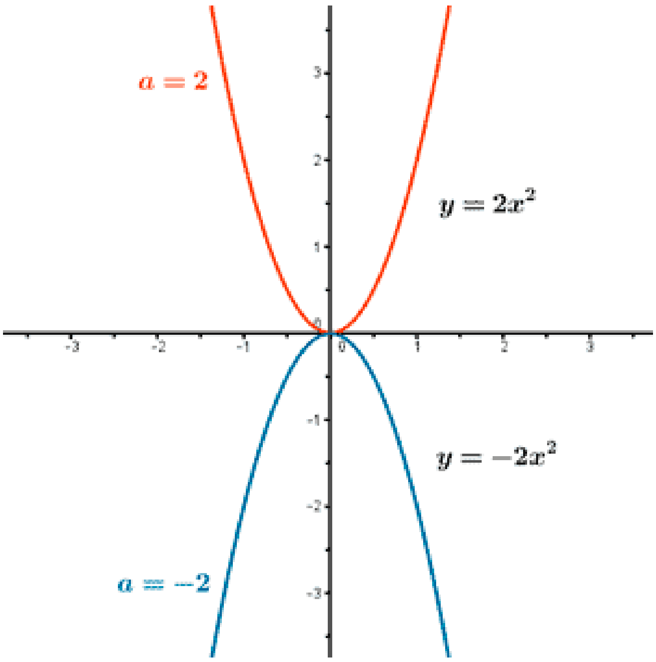
1) El dominio de las funciones cuadráticas es R.

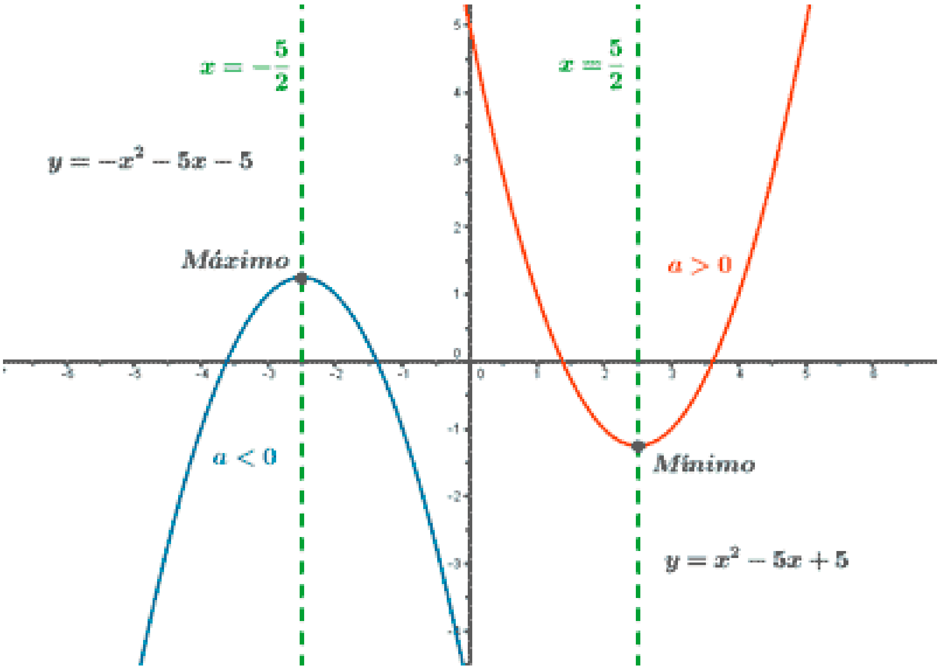
2) Tiene un eje de simetría cuya fórmula es:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3) El vértice de la parábola es:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$





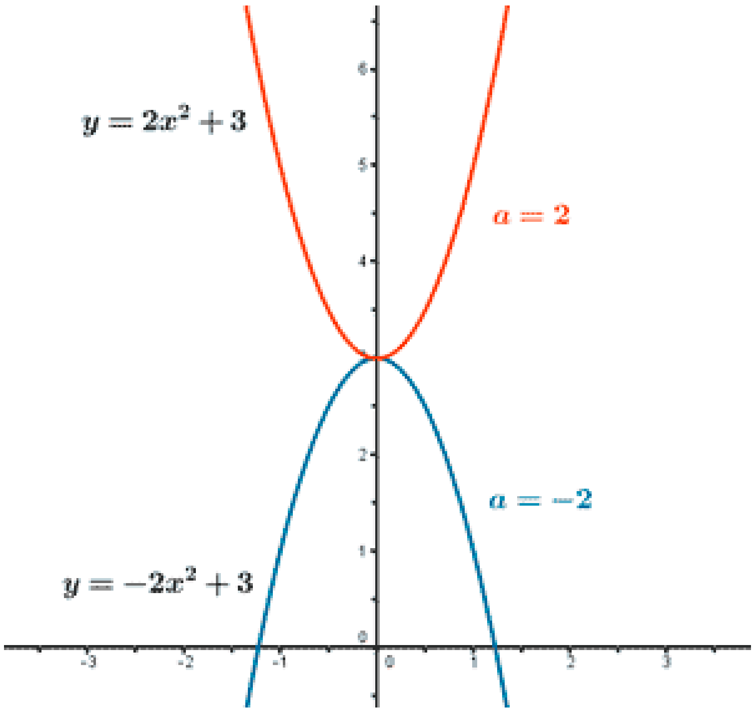
4) Corta al eje X en dos puntos, uno o ninguno, según el número de raíces reales de $ax^2 + bx + c = 0$.
5) Corta el eje Y en el punto $(0, c)$.
6) El vértice es un mínimo si $a > 0$ y un máximo si $a < 0$.
7) Es cóncava si $a > 0$ y convexa si $a < 0$.
8) Al aumentar a en valor absoluto, la parábola se hace más estrecha.

Tipos de funciones cuadráticas

En una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.

- **Si b = 0 y c = 0**

  La función $f(x) = ax^2$ tiene su vértice en el punto (0, 0) y su eje de simetría es el eje Y.



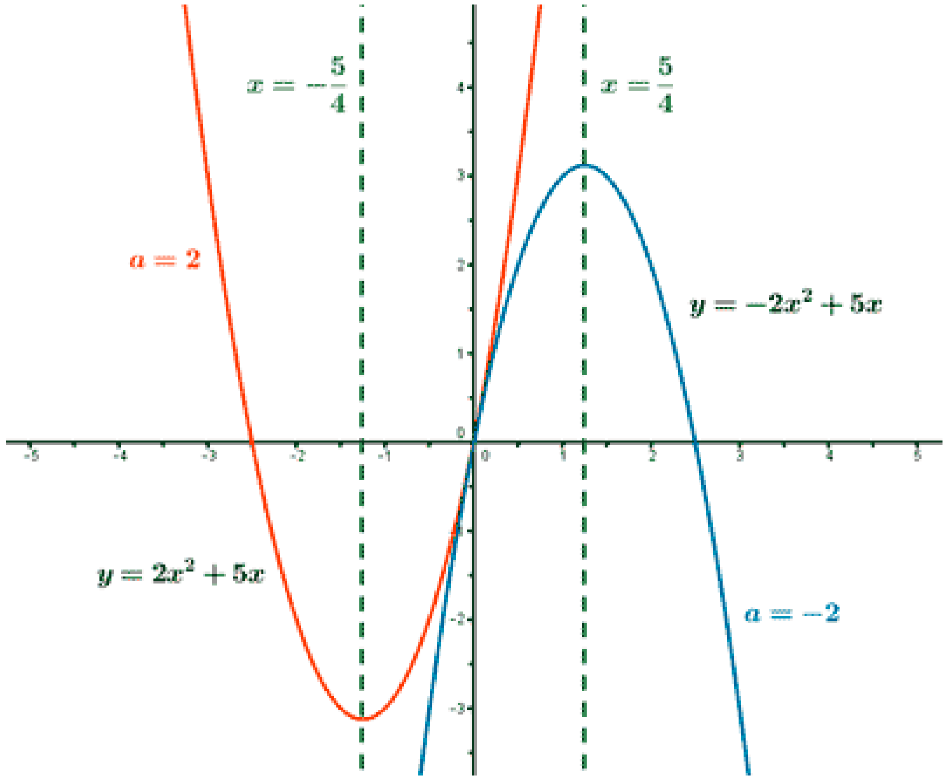
- **Si b = 0 y c ≠ 0**

  La función $f(x) = ax^2 + c$ tiene su vértice en el punto (0, c) y su eje de simetría es el eje Y.

- **Si b ≠ 0 y c = 0**

  La función $f(x) = ax^2 + bx$ tiene su vértice y su eje de simetría en:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2}{4a}\right) \quad , \quad x = \frac{-b}{2a}$$



5. INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN.

Ecuación de la recta punto - pendiente

Sabemos que una ecuación lineal se expresa de la forma:

y = ms + n

Una ecuación lineal se representa mediante una recta que pasa por el punto (0, n) y tiene pendiente m.

La pendiente de una recta es la variación que se produce en la y cuando la variable x aumenta una unidad. En una ecuación lineal, la pendiente es el coeficiente m.

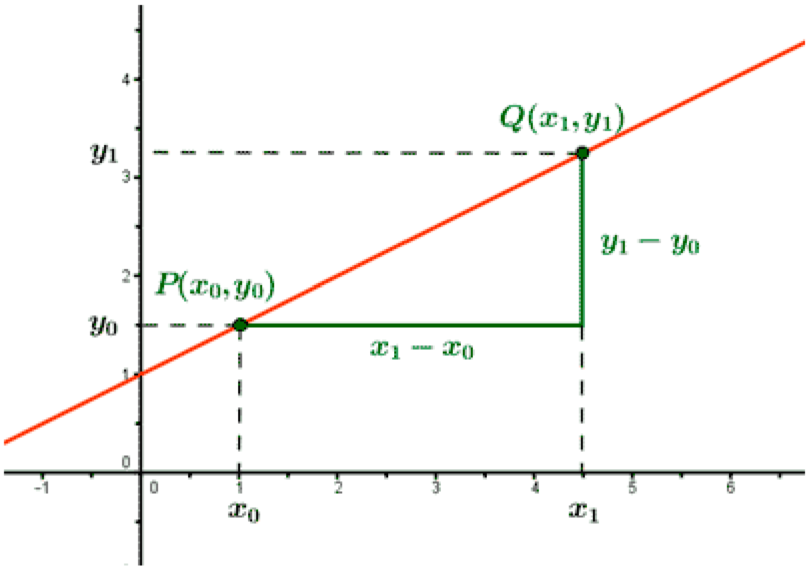
Podemos calcular la pendiente de una recta si conocemos las coordenadas de dos de sus puntos, P(x_0, y_0), Q(x_1, y_1), mediante la siguiente fórmula:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0}{x_1 - \mathbf{x}_0}$$

Donde $y_1 - y_0$ es la variación de la y, $x_1 - x_0$ es la variación de la x.

Si de una recta (función lineal) se conocen uno de sus puntos (x0, y0) y su pendiente, m, podemos escribir la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta así:

$$y = m\left(x - x_0\right) + y_0$$



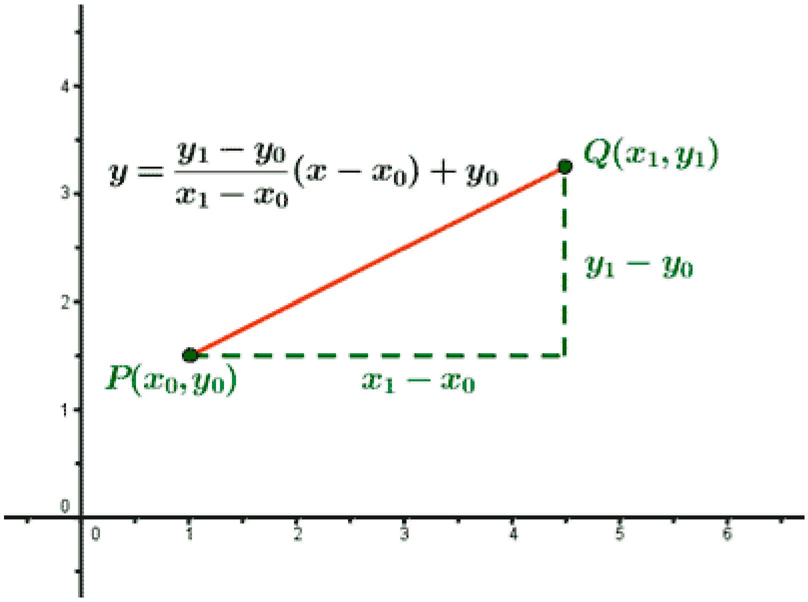
Interpolación lineal

La interpolación es un procedimiento que nos permite saber, aproximadamente, los valores intermedios que toma una función desconocida cuando nos dan datos conocidos.

Dados dos puntos P(x0 , y0) , Q(x1 , y1) de una función f de la que no conocemos su expresión algebraica, podemos calcular aproximadamente el valor que toma la función en un punto x ∈ [x0 , x1] mediante la expresión:

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Este tipo de interpolación se llama interpolación lineal.



Interpolación cuadrática

Dados tres puntos (x0 , y0) , (x1 , y1) , (x2 , y2) no alineados de una función de la que no conocemos su expresión algebraica, podemos calcular aproximadamente el valor que toma la función en un punto x ∈ [x0 , x2] mediante la expresión:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Donde los coeficientes a, b, c se calculan resolviendo el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \\ y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Este tipo de interpolación se llama interpolación cuadrática.

Extrapolación

Cuando el valor que queremos calcular está fuera del intervalo conocido, pero muy próximo a él, se llama extrapolación.

6. FUNCIONES CÚBICAS.

Una función polinómica de tercer grado, o función cúbica, se expresa de la siguiente forma:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Donde a, b, c y d son números reales, denominados coeficientes del polinomio y a≠0.

Las características generales de las funciones polinómicas de tercer grado son:

1) El dominio de las funciones cúbicas es $\mathbb{R}$.
2) El recorrido de las funciones es $\mathbb{R}$.
3) Son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.
4) Cortan al eje X en uno, dos o tres puntos, según el número de raíces reales de $ax^3 + bx^2 + cx + d$.
5) Cortan al eje Y en el punto (0, d), pues f (0) = d.
6) No están acotadas: no están acotadas ni inferior, ni superiormente.
7) No son periódicas.

Ejemplo de función cúbica $f(x) = x^3$

1) **Tipo de función:** función cúbica.
2) **Dominio:** Dom (f) = $\mathbb{R}$
3) **Recorrido o imagen:** Im (f) = $\mathbb{R}$
4) **Continuidad:** es continua en todo $\mathbb{R}$.
5) **Periodicidad:** no es periódica.

6) Simetrías: tiene simetría impar, pues

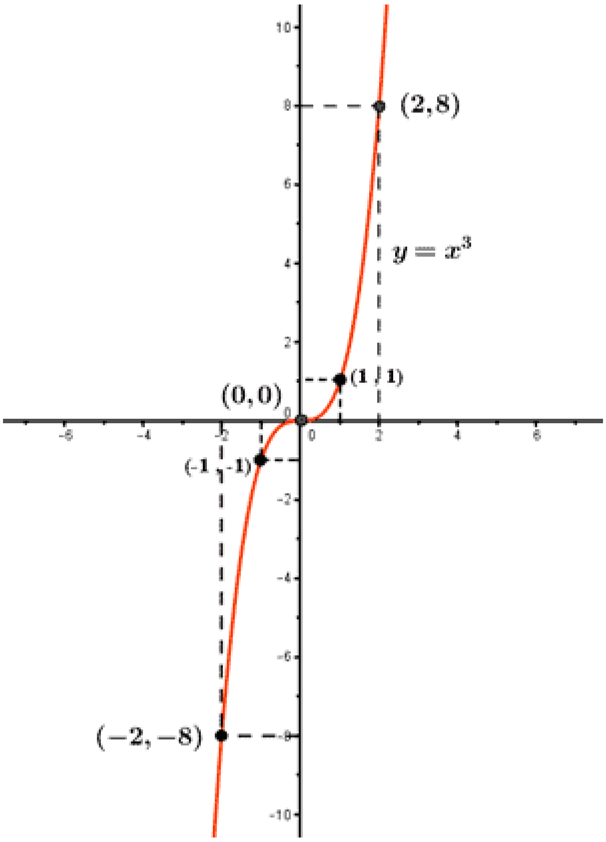
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

7) Asíntotas: no tiene asíntotas.

8) Cortes con los ejes:

- Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \iff x^3 = 0 \iff x = 0$
- Cortes con el eje Y: como $d = 0 \Rightarrow (0\ ,\ 0)$

x	0	1	−1	2	−2
y	0	1	−1	8	−8



9) Monotonía: Es creciente en todo $\mathbb{R}$.

10) Máximos y mínimos relativos: No tiene máximos ni mínimos relativos.

11) Curvatura y puntos de inflexión: tiene un punto de inflexión en (0, 0).

12) Acotación: no está acotada, pues no está acotada ni superior ni inferiormente.

<u>7. FUNCIONES RACIONALES.</u>

Una función es racional si es el cociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Siendo el grado del polinomio Q(x) distinto de 0.

Las características generales de las funciones racionales son:

1) El dominio de las funciones racionales son los números reales menos las raíces del denominador, es decir:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{ x \in \mathbb{R} \quad \text{tales que} \quad Q(x) = 0 \}$$

2) Son discontinuas en los valores de x que son raíces del denominador.

3) Tienen asíntotas verticales en cada raíz del denominador que no lo sea del numerador, y pueden tener asíntotas horizontales y oblicuas.

Función de proporcionalidad inversa

Una función de proporcionalidad inversa es una función racional del tipo:

$$f(x) = \frac{k}{x} \qquad \textbf{con} \qquad k \neq 0$$

Su gráfica es una hipérbola.

Las características generales de las funciones de proporcionalidad inversa son:

1) El dominio de la función de proporcionalidad inversa es R - {0}.
2) La función es discontinua en x = 0.
3) En x = 0 existe una asíntota vertical.
4) A medida que los valores de x crecen o decrecen, la función se acerca al eje Y, por lo tanto tiene una asíntota horizontal en y = 0.
5) La gráfica de este tipo de funciones no corta a los ejes de coordenadas.

6) La función es impar y por tanto simétrica al origen de coordenadas.
7) Para **k > 0** la función es decreciente y la gráfica está en el primer y tercer cuadrante.
   Para **k < 0** la función es creciente y la gráfica está en el segundo y cuarto cuadrante.

Representación gráfica de funciones de proporcionalidad inversa:

$$f(x) = \frac{3}{x} \qquad g(x) = -\frac{3}{x}$$

1) **Puntos de corte con los ejes:**

   Para x = 0 la función f(x) no está definida puesto que f (0) = 3/0 (no real).

   Para x = 0 la función g(x) no está definida puesto que g (0) = -3/0 (no real).

2) **Simetrías:**

   Las funciones f(x) y g(x) son impares, es decir, son simétricas respecto al eje de coordenadas.

$$f(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x} = -f(x)$$

$$g(-x) = -\frac{3}{-x} = \frac{3}{x} = -g(x)$$

3) **Crecimiento o decrecimiento:**

   Para la función f(x) tenemos que k > 0, por lo tanto la función es decreciente y la gráfica está en el primer y tercer cuadrante. Es decir, la función es decreciente en (- ∞, 0) ∪ (0, + ∞).

   Para la función g(x) tenemos que k < 0, por lo tanto la función es creciente y la gráfica está en el segundo y cuarto cuadrante. Es decir, la función es creciente en (- ∞, 0) ∪ (0, + ∞).

4) **Tabla de valores:**

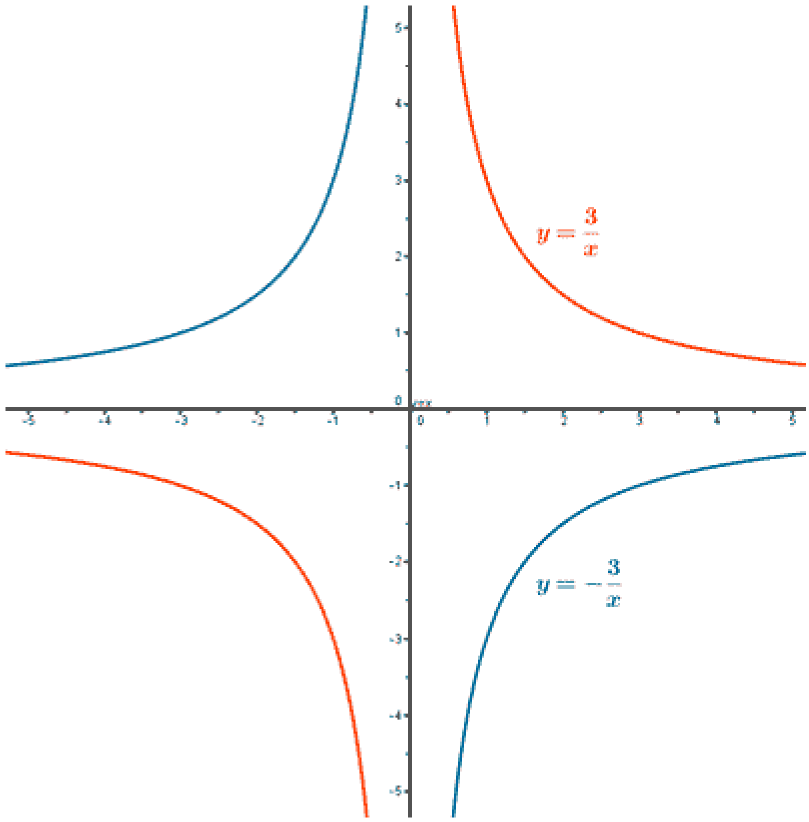
   Construimos una tabla de valores.

$f(x) = \frac{3}{x}$

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	-1	$\frac{-3}{2}$	-3	3	$\frac{3}{2}$	1

$g(x) = -\frac{3}{x}$

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$\frac{-3}{2}$	-1



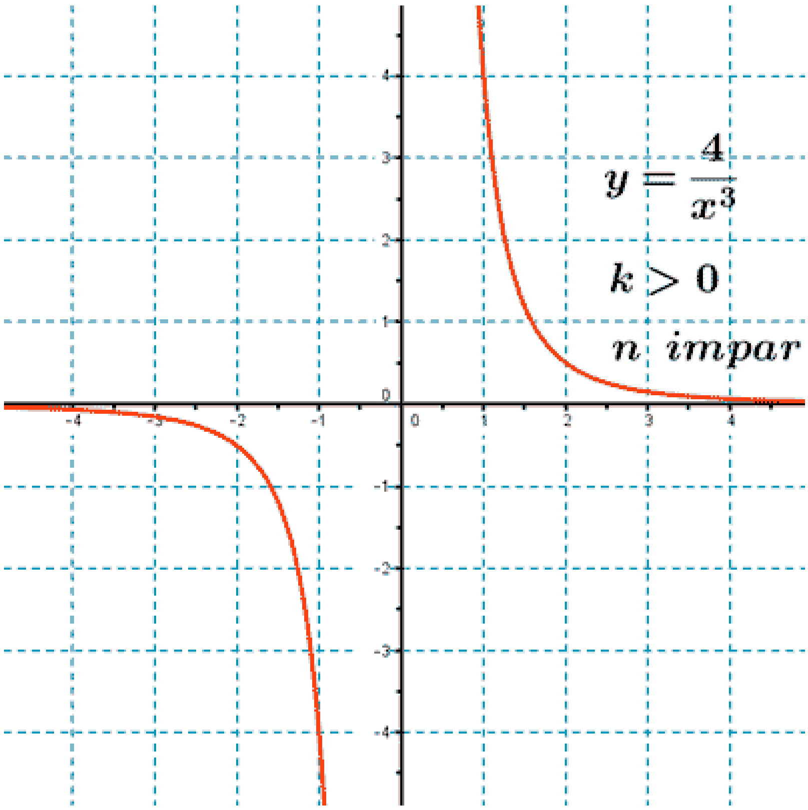
8. FUNCIONES DEL TIPO: $\frac{k}{x^n}$

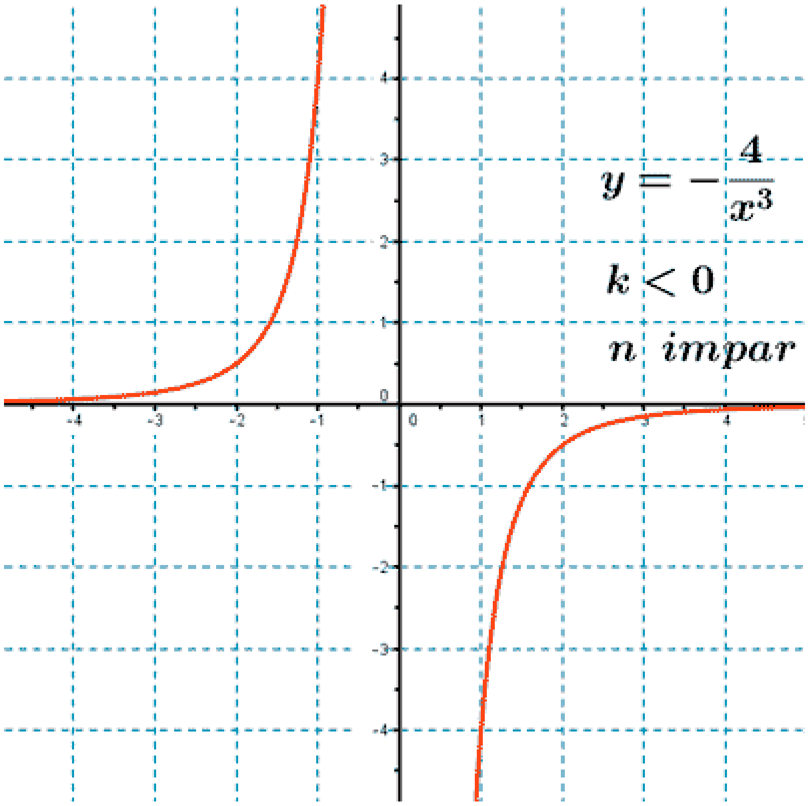
Las funciones racionales del tipo:

$$f(x) = \frac{k}{x^n}$$

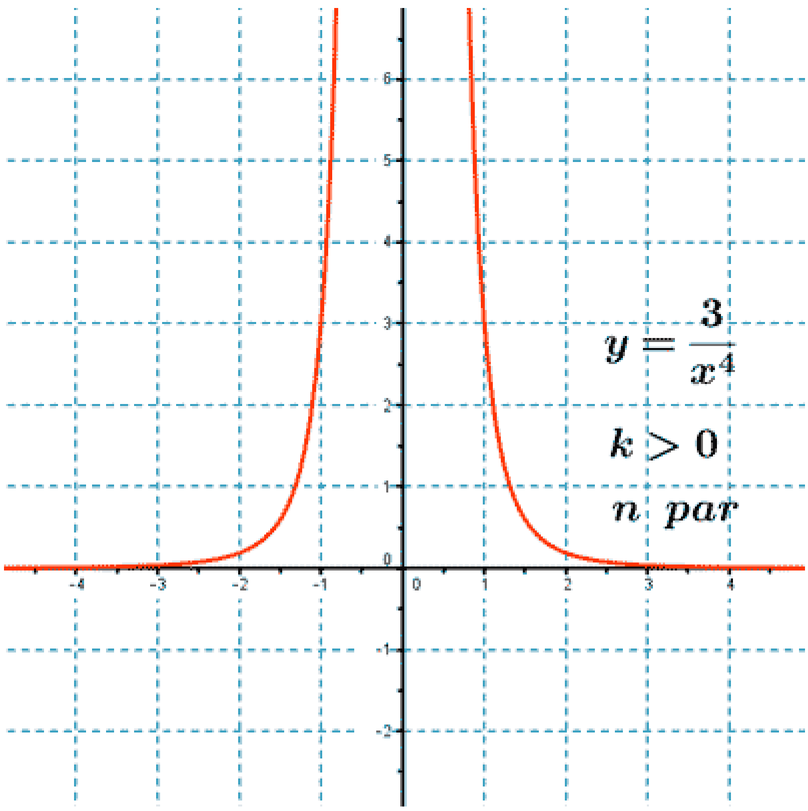
Son funciones racionales cuyo denominador es de la forma xn y su numerador es un número real.

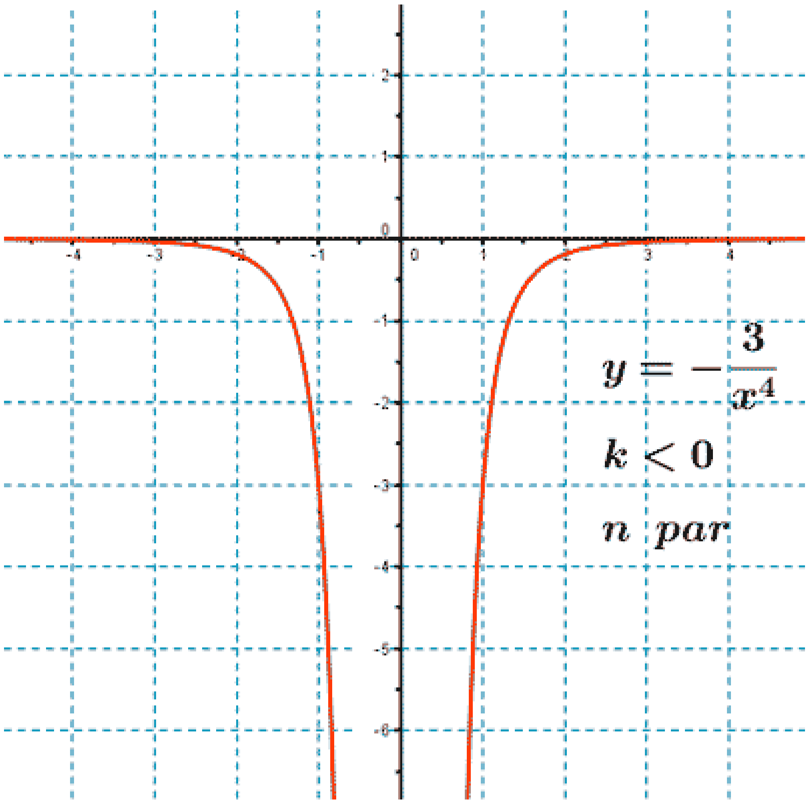
Ejemplo de función del tipo: k / x^n con n impar





Ejemplo de función del tipo: k / x^n con n par





9. FUNCIONES DEL TIPO: K/(X - A)2

Las funciones racionales del tipo:

$$f(x) = \frac{k}{(x-a)^2}$$

Son funciones racionales cuyo denominador es un polinomio de segundo grado y su numerador es un número real.

Las características generales de este tipo de funciones racionales son:

1) El dominio está formado por todos los valores reales que no anulan el denominador:

Dom (f) = R - {a}

2) El recorrido depende del signo de la constante k :

- Si $k > 0 \Rightarrow Im(f) = (0, \infty)$
- Si $k < 0 \Rightarrow Im(f) = (-\infty, 0)$

3) No cortan al eje X (abscisas), y cortan al eje Y (ordenadas) en el punto:

$$\left(0, \frac{k}{a^2}\right) \quad , \text{si} \quad a \neq 0$$

4) Son discontinuas en el punto de abscisa: $x = a$.

5) La acotación depende del signo de la constante k:

- Si $k > 0$: están acotadas inferiormente por $y = 0$.
- Si $k < 0$: están acotadas superiormente por $y = 0$.

En cualquier caso, la función no está acotada, pues no está acotada, a la vez, superior e inferiormente.

6) Su simetría depende del valor de la constante a:

- Si $a = 0$: tiene simetría par.
- Si $a \neq 0$: no tiene simetría par ni impar.

7) Su monotonía depende del valor de la constante k:

- Si $k > 0$:
  - $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, a)$
  - $f(x)$ es estrictamente decreciente en (a, ∞).

- Si $k < 0$:
  - $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, a)$

  - $f(x)$ es estrictamente creciente en (a, ∞).

8) No son periódicas.

9) No tienen extremos relativos.

Ejemplo de función del tipo: k / (x - a)^2

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

1) Los valores que anulan al denominador son:

$$(x - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

$$Dom\ (f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

2) Como $k = 3 > 0$: $Im(f) = (0, \infty)$

3) Corta al eje de ordenadas en el punto :

$$k = 3,\ a = 1 \quad \Rightarrow \quad (0, 3)$$

4) Es discontinua en el punto : $x = 1$

5) Como $k = 3 > 0$: está acotada inferiormente por $y = 0$.

6) Como $a \neq 0$: no tiene simetría par ni impar.

7) Como $k > 0$:

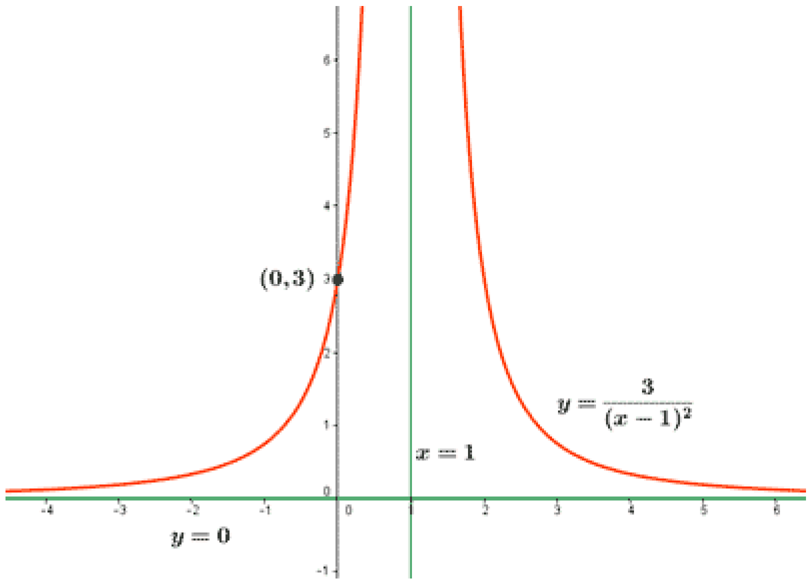
- La función es estrictamente creciente en $(-\infty, 1)$.
- La función es estrictamente decreciente en $(1, \infty)$.

8) No tiene periodicidad.

9) No tiene extremos relativos.

10) Tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	2	3
y	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	3	12	3	$\frac{3}{4}$



10. FUNCIONES CON RADICALES O FUNCIONES IRRACIONALES.

Las funciones con radicales son las funciones que tienen la variable independiente x bajo el signo radical, es decir:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

Las características generales de las funciones con radicales son:

1) Si n es un número par su dominio es el intervalo en el que $g(x) \geq 0$

2) Si n es impar, su dominio es R.

3) Su representación gráfica es una rama de una parábola.

Ejemplo de función irracional: f(x) = $\sqrt{x}$

1) **Dominio:**

   Como n es par, el dominio de f(x) es el conjunto de valores donde x ≥ 0, es decir, Dom (f) = [0, +∞)

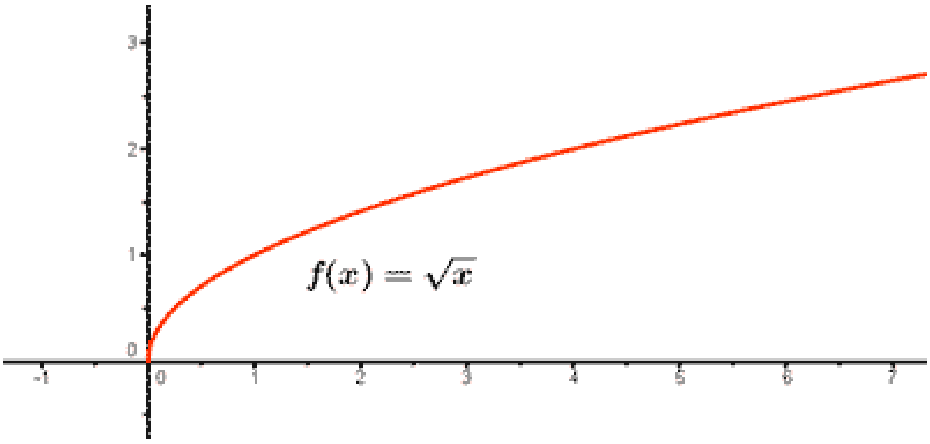
2) **Puntos de corte:**

   f (0) = √0 = 0, es decir, el punto de corte coincide con el eje de coordenadas (0, 0).

3) **Tabla de valores:**

$f(x) = \sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3



Ejemplo de función irracional: f(x) = - $\sqrt{x}$

1) **Dominio:**

   Como n es par, el dominio de f(x) es el conjunto de valores donde $x \geq 0$, es decir, Dom (f) = [0, +∞)

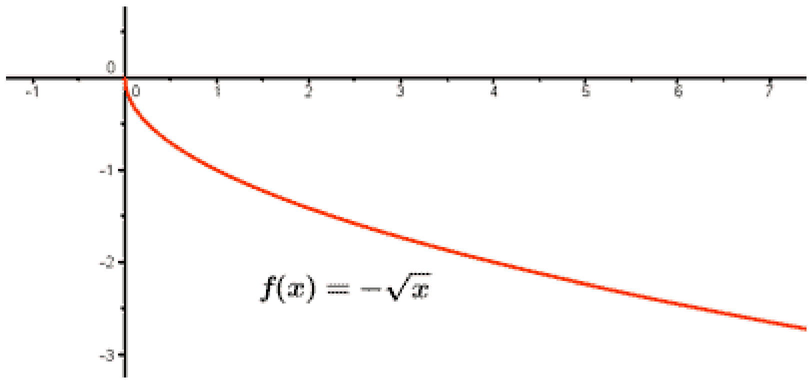
2) **Puntos de corte:**

   f (0) = - √0 = 0, es decir, el punto de corte coincide con el eje de coordenadas (0, 0).

3) **Tabla de valores:**

$f(x) = -\sqrt{x}$

x	0	1	4	9
y	0	- 1	- 2	- 3



Ejemplo de función irracional: f(x) = $\sqrt[3]{x}$

1) **Dominio:**

   Como n es impar, el dominio de f(x) es el conjunto de todos los números reales, es decir, Dom (f) = R.

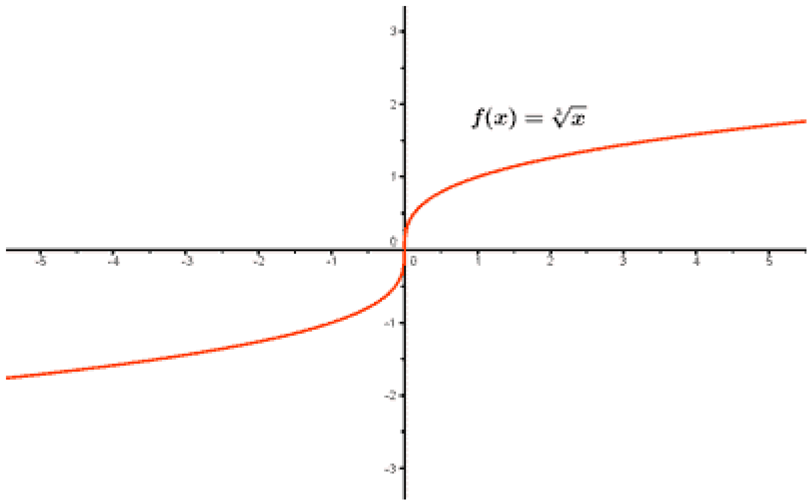
2) **Puntos de corte:**

   f (0) = $\sqrt[3]{0}$ = 0, es decir, el punto de corte coincide con el eje de coordenadas (0, 0).

3) **Tabla de valores:**

$f(x) = \sqrt[3]{x}$

x	- 8	- 1	0	1	8
y	- 2	- 1	0	1	2



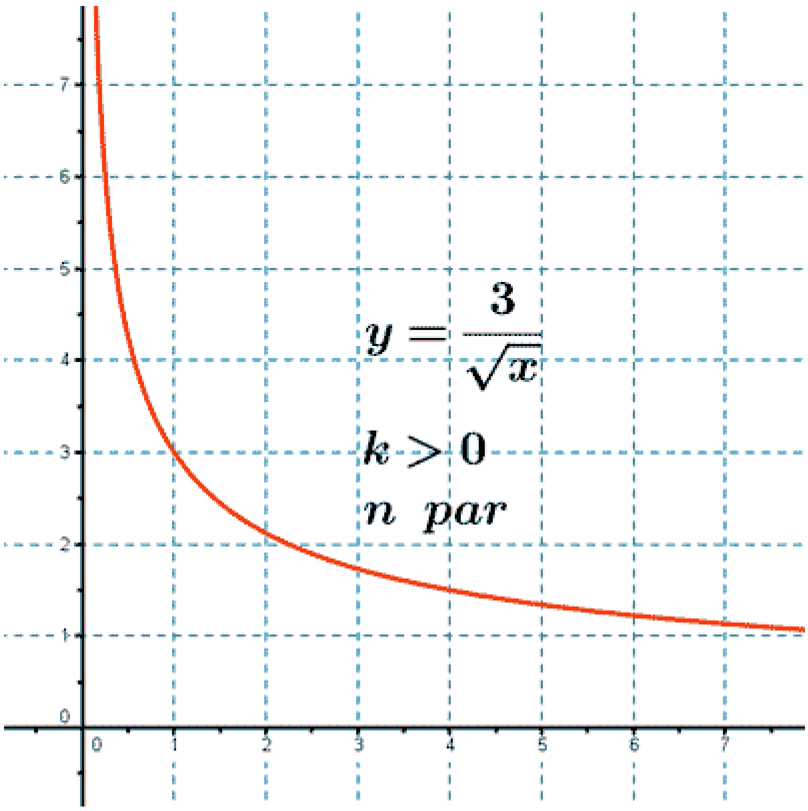
11. FUNCIONES DEL TIPO: K/N$\sqrt{x}$

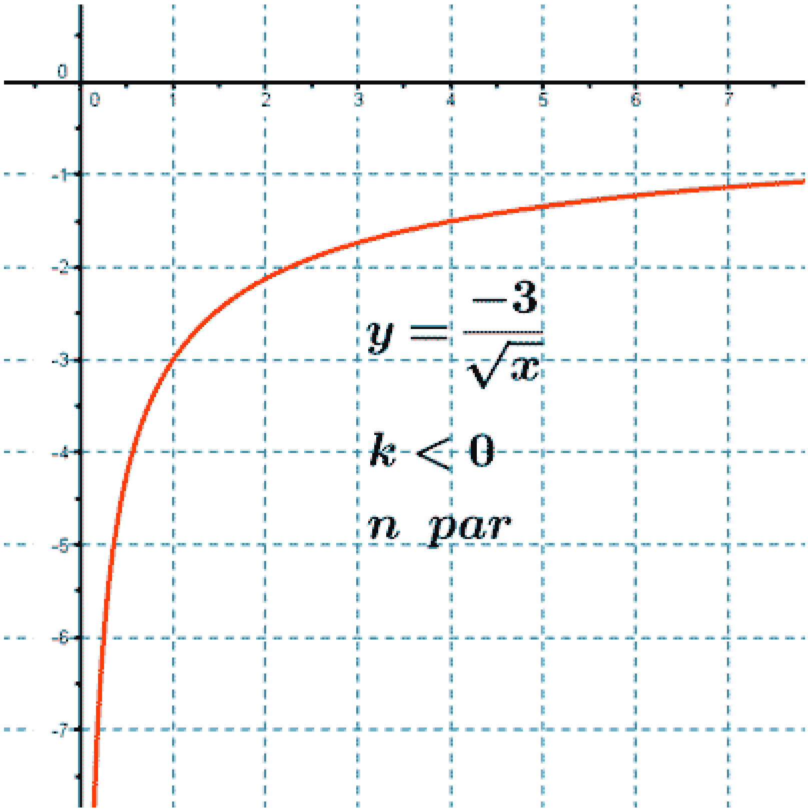
Las funciones radicales del tipo:

$$f(x) = \frac{k}{\sqrt[n]{x}}$$

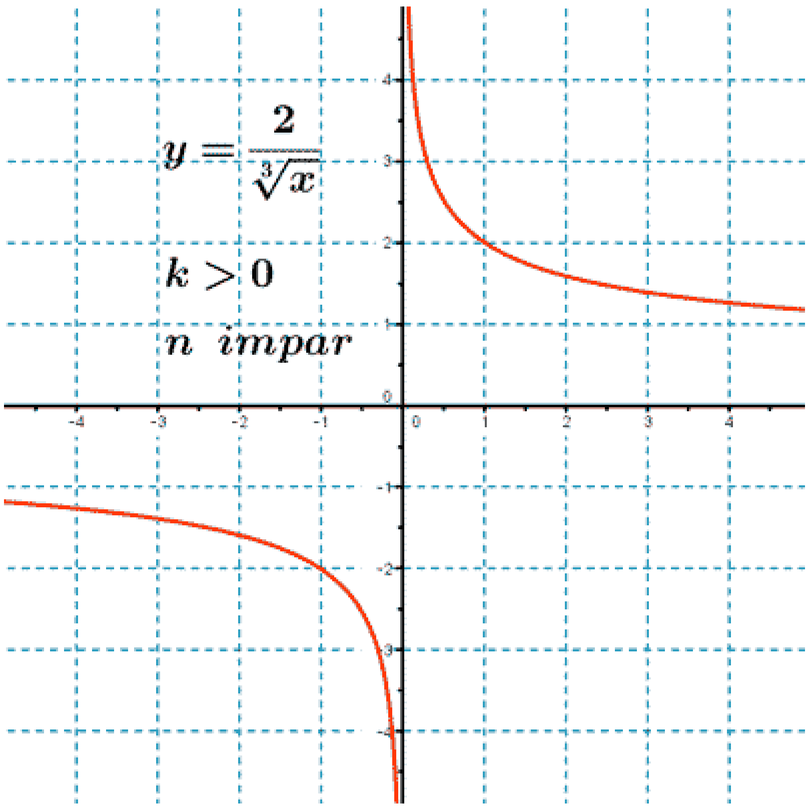
Son funciones racionales cuyo denominador es de la forma n√x y su numerador es un número real.

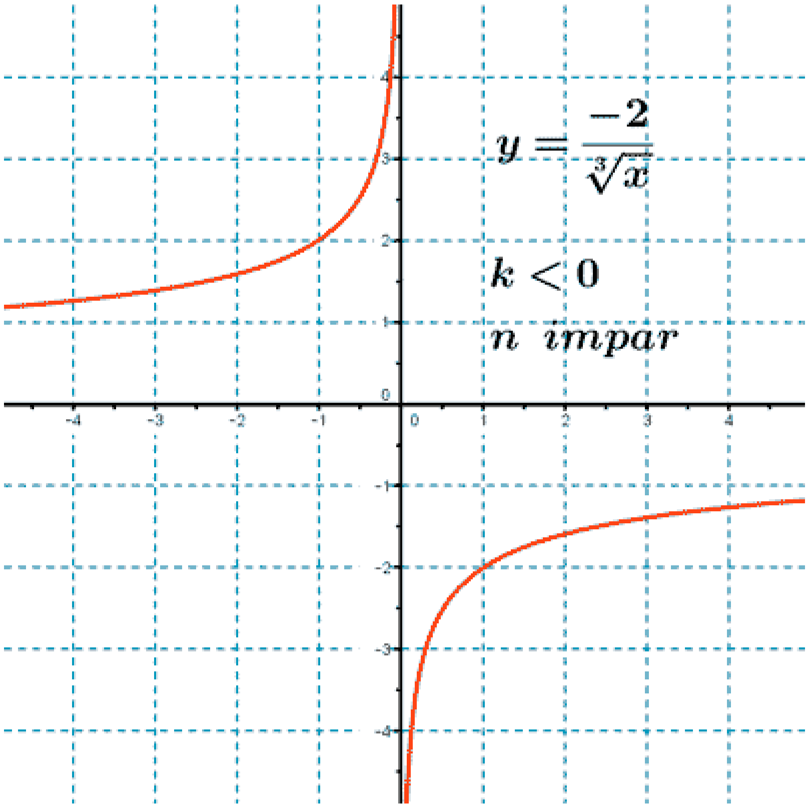
Ejemplo de función del tipo: k / $n\sqrt{x}$ con n par





Ejemplo de función del tipo: **k / ⁿ√x** **con n impar**




$y = \frac{-2}{\sqrt[3]{x}}$
$k < 0$
n impar

FUNCIONES TRANSCENDENTES Y FUNCIONES A TROZOS

1. Funciones exponenciales.
2. Funciones logarítmicas.
3. Dominio y recorrido de las funciones trigonométricas.
4. Funciones trigonométricas:
    - Función seno.
    - Función coseno.
    - Función tangente.
    - Función cotangente.
    - Función secante y cosecante.
5. Funciones trigonométricas inversas:
    - Función arco seno.
    - Función arco coseno.
    - Función arco tangente.
6. Funciones a trozos.
7. Función parte entera.
8. Función parte decimal. Función distancia.
9. Función signo.

1. FUNCIONES EXPONENCIALES

Las funciones exponenciales son las funciones que tienen la variable independiente x en el exponente, es decir, son de la forma:

$$f(x) = a^x \quad \textbf{siendo} \quad a > 0 \quad \textbf{y} \quad a \neq 1$$

Las características generales de las funciones exponenciales son:

1) El dominio de una función exponencial es R.

2) Su recorrido es $(0, +\infty)$.

3) Son funciones continuas.

4) Como $a^0 = 1$, la función siempre pasa por el punto $(0, 1)$.

La función corta el eje Y en el punto $(0, 1)$ y no corta el eje X.

5) Como $a^1 = a$, la función siempre pasa por el punto $(1, a)$.

6) Si $a > 1$ la función es creciente.

Si $0 < a < 1$ la función es decreciente.

7) Son siempre cóncavas.

8) El eje X es una asíntota horizontal.

Ejemplo de funciones exponenciales: $f(x) = 2^x$ $g(x) = 2^{-x} = (1/2)^x$

$$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$$

1) **Dominio:**

   El dominio de las funciones exponenciales es R.

   Dom (f) = Dom (g) = R.

2) **Recorrido:**

   El recorrido de las funciones exponenciales es $(0, +\infty)$.

   Im (f) = Im (g) = $(0, +\infty)$.

3) **Puntos de corte:**

   $f(0) = 2^0 = 1$, el punto de corte con el eje Y es (0, 1).

   $g(0) = -2^0 = 1$, el punto de corte con el eje Y es (0, 1).

   La funciones f(x) y g(x) no cortan al eje X.

4) **Crecimiento y decrecimiento:**

   La función f(x) es creciente ya que $a > 1$.

   La función g(x) es decreciente ya que $0 < a < 1$.

5) **Concavidad y convexidad:**

   Las funciones f(x) y g(x) son cóncavas.

6) **Asíntotas:**

   Las funciones f(x) y g(x) tienen una asíntota en el eje X.

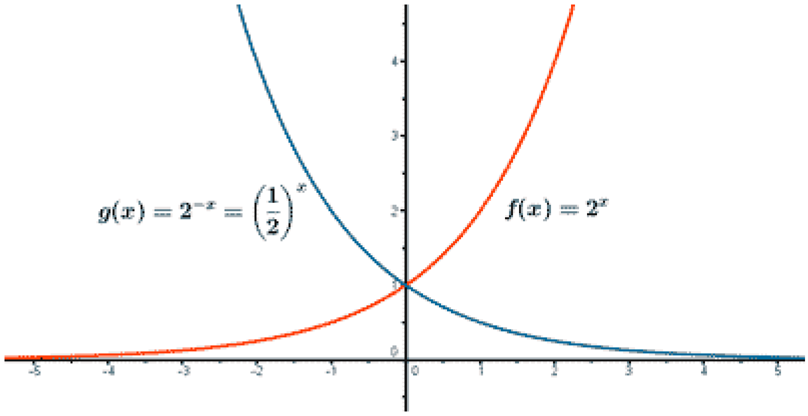
7) Tabla de valores:

$f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$g(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Resumen de las propiedades de la función exponencial e^x

1	La función exponencial es la inversa de la logarítmica: $y = e^x \Leftrightarrow x = \text{Ln } y$
2	La función $y = e^x$ tiene por dominio $\mathbb{R}$ y por recorrido $y > 0$
3	La función $y = e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
4	La función $y = e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
5	$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ y $\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

Ejemplo de funciones exponenciales: $f(x) = e^x$

1) **Dominio:**

El dominio de las funciones exponenciales es R.

Dom (f) = R.

2) **Recorrido:**

El recorrido de las funciones exponenciales es $(0, +\infty)$.

$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$.

3) **Puntos de corte:**

$f(0) = e^0 = 1$, el punto de corte con el eje Y es (0, 1).

La función f(x) no corta al eje X.

4) **Crecimiento y decrecimiento:**

La función f(x) es creciente ya que $e > 1$.

5) **Concavidad y convexidad:**

Las función f(x) es cóncava.

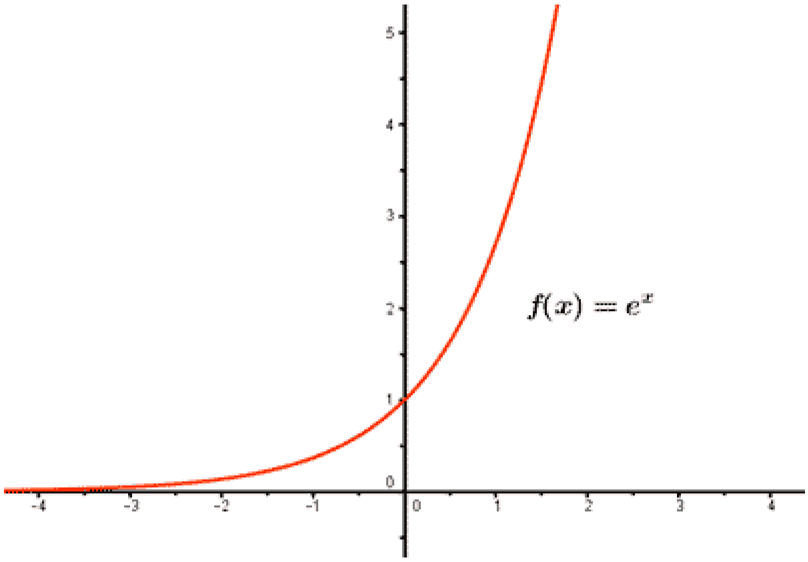
6) **Asíntotas:**

Las función f(x) tiene una asíntota en el eje X.

7) Tabla de valores:

$f(x) = e^{x}$

x	- 2	- 1	0	1	2
y	$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2



2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Las funciones logarítmicas son funciones del tipo:

$$f(x) = \log_a x \quad \text{siendo} \quad a > 0 \quad \text{y} \quad a \neq 1$$

Es la inversa de la función exponencial $f(x) = a^x$

Las características generales de las funciones logarítmicas son:

1) El dominio de una función logarítmica son los números reales positivos:

Dom (f) = (0. + ∞) .

2) Su recorrido es R: Im (f) = R.

3) Son funciones continuas.

4) Como $\log_a 1 = 0$, la función siempre pasa por el punto (1, 0).

La función corta el eje X en el punto (1, 0) y no corta el eje Y.

5) Como $\log_a a = 1$, la función siempre pasa por el punto (a, 1).

6) Si $a > 1$ la función es creciente.

Si $0 < a < 1$ la función es decreciente.

7) Son convexas si $a > 1$.

Son cóncavas si $0 < a < 1$.

8) El eje Y es una asíntota vertical.

Ejemplo de funciones logarítmicas: $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = \log_{1/2} x$

$$\log_a x = b \iff a^b = x$$

1) **Dominio:**

El dominio de las funciones logarítmicas es $(0, +\infty)$.

$$Dom\ (f) = Dom\ (g) = (0, +\infty).$$

2) **Recorrido:**

El recorrido de las funciones logarítmicas es R.

$$Im\ (f) = Im\ (g) = R.$$

3) **Puntos de corte:**

$f(1) = \log_2 1 = 0$, el punto de corte con el eje X es $(1, 0)$.

$g(1) = \log_{1/2} 1 = 0$, el punto de corte con el eje X es $(1, 0)$.

La funciones $f(x)$ y $g(x)$ no cortan al eje Y.

4) **Crecimiento y decrecimiento:**

La función $f(x)$ es creciente ya que $a > 1$.

La función $g(x)$ es decreciente ya que $0 < a < 1$.

5) **Concavidad y convexidad:**

Las función $f(x)$ es convexa ya que $a > 1$.

Las función $g(x)$ es cóncava ya que $0 < a < 1$.

6) **Asíntotas:**

Las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen una asíntota en el eje Y.

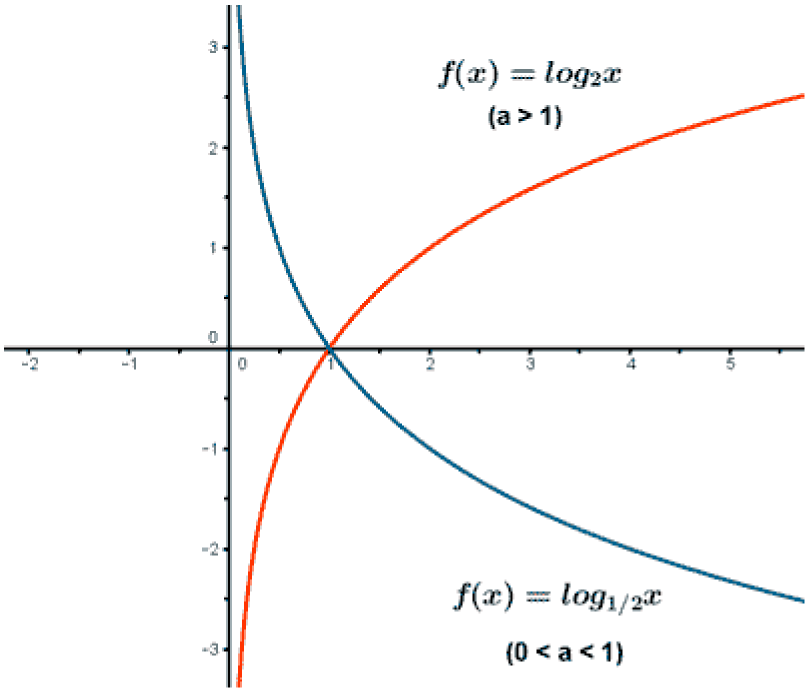
7) Tabla de valores:

$f(x) = \log_2 x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	- 2	- 1	0	1	2

$g(x) = \log_{1/2} x$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	2	1	0	- 1	- 2



Resumen de las propiedades de la función logaritmo neperiano

1	**La función logarítmica es la inversa de la exponencial:** **y = Ln x ⇔ x = e^y**
2	**La función y = Ln x tiene por dominio {x ∈ R | x > 0} y por recorrido R.**
3	**La función y = Ln x es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.**
4	**La función y = Ln x es convexa o cóncava hacia abajo en todo su dominio.**
5	$\lim_{x \to 0^+} \text{Ln } x = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} \text{Ln } x = \infty$

La función logaritmo neperiano: f(x) = ln x

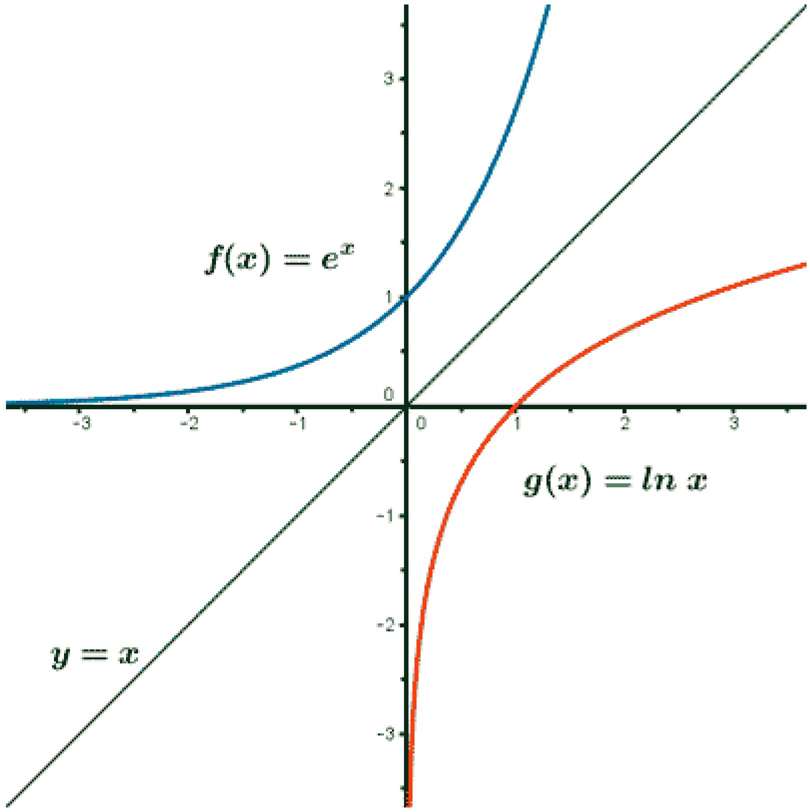
La función logaritmo neperiano es la inversa de $y = e^x$

Su gráfica es simétrica de $y = e^x$ respecto a $y = x$

$$y = e^x$$

$$x = e^y$$

Por definición: $y = \ln x$



3. DOMINIO Y RECORRIDO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las funciones $f(x) = \text{sen } g(x)$ y $f(x) = \cos g(x)$ están definidas siempre que lo esté la función $g(x)$.

La función $f(x) = \text{tg } g(x)$ está definida siempre que $g(x) \neq \pi/2 + k \cdot \pi$

	Dominio	**Imagen, rango o recorrido**
y = sen x	R	$\{ y \in R \mid -1 \leq y \leq 1 \}$
y = cos x	R	$\{ y \in R \mid -1 \leq y \leq 1 \}$
y = tg x	$\{ x \in R \mid x \neq \pi/2\ (2k + 1) \}$	R
y = cotg x	$\{ x \in R \mid x \neq k \cdot \pi \}$	R
y = sec x	$\{ x \in R \mid x \neq \pi/2\ (2k + 1) \}$	$\{ y \in R \mid y \leq -1$ ó $y \geq 1 \}$
y = cosec x	$\{ x \in R \mid x \neq k \cdot \pi \}$	$\{ y \in R \mid y \leq -1$ ó $y \geq 1 \}$

Ejemplos de dominio de funciones trigonométricas

1) $f(x) = \text{sen}\left(x^2 + 2\right)$

El dominio de f(x) es R Dom (f) = R.

2) $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

La función f(x) no está definida cuando x = 0 Dom (f) = R - {0}.

3) $f(x) = \text{sen}\left(\sqrt{1-x}\right)$

La función f(x) no está definida cuando x > 1 Dom (f) = (- ∞, 1].

4) $f(x) = \text{tg}\,(3 + 2x)$

La función f(x) no está definida cuando:

$$3 + 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad 6 + 4x = \pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi - 6}{4}$$

$$\text{Dom(f)} = \text{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi - 3}{2} \quad \text{con} \quad k \in \text{Z}\right\}$$

Dominio y recorrido de las funciones trigonométricas inversas

	Dominio	Imagen, rango o recorrido
y = arc sen x	{ x ∈ R | $-1 \le x \le 1$ }	{ y ∈ R | $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ }
y = arc cos x	{ x ∈ R | $-1 \le x \le 1$ }	{ y ∈ R | $0 \le y \le \pi$ }
y = arc tg x	R	{ y ∈ R | $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ }
y = arc cotg	R	{ y ∈ R | $0 \le y \le \pi$ }
y = arc sec x	{ x ∈ R | $x \le -1$ ó x	{ y ∈ R | $0 \le y \le \pi$
y = arc cosec	{ x ∈ R | $x \le -1$ ó x	{ y ∈ R | $-\pi/2 \le y$

4. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Una función trigonométrica es aquella que da el valor de una razón trigonométrica en función del ángulo.

Las funciones trigonométricas son: sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x, cosec x

Todas las funciones trigonométricas son periódicas.

Función seno

Las características fundamentales de la función seno son las siguientes:

1) Su dominio es R y es continua.

2) Su recorrido es $[-1, 1]$ ya que $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$.

3) Corta al eje X en los puntos $k \cdot \pi$ con $k \in Z$

Corta al eje Y en el punto $(0, 0)$.

4) Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$$

5) Es estrictamente creciente en los intervalos de la forma (a, b) donde

$a = -\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ y $b = \pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ siendo $k \in Z$

Es estrictamente decreciente en los intervalos de la forma

(a, b) donde $a = \pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ y $b = 3\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi$ siendo $k \in Z$.

6) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma

$$(\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi, 1) \text{ con } k \in Z.$$

Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma

$$(3\pi/2 + 2 \cdot k \cdot \pi, -1) \text{ con } k \in Z.$$

7) Es periódica de periodo 2π

$$\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$$

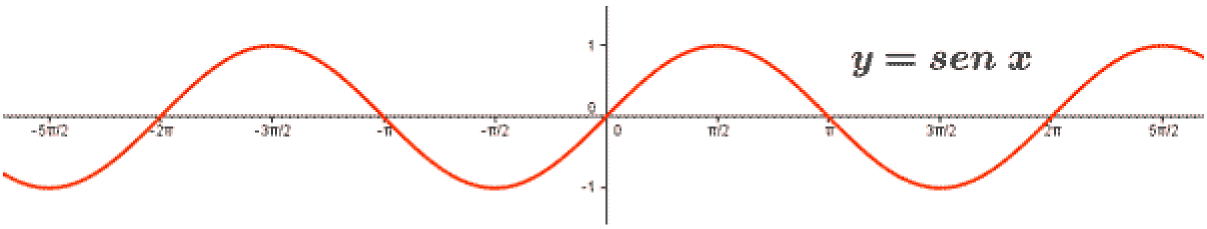
La función $f(x) = \text{sen}\ (k\cdot x)$ es periódica de periodo $p = 2\pi/k$

Para $|k|>1$ el periodo disminuye y para $0 < |k| < 1$ el periodo aumenta.

8) Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por - 1.

$f(x) = \text{sen}\ x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

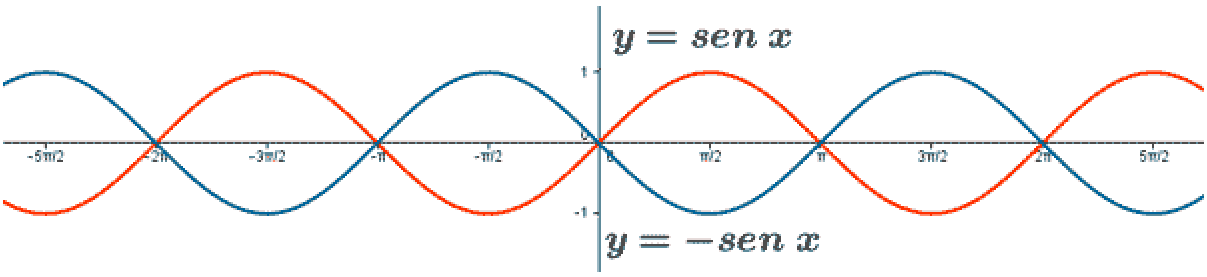


- **Transformaciones de la función seno**

A partir de la gráfica de la función f(x) = sen x pueden dibujarse las de:

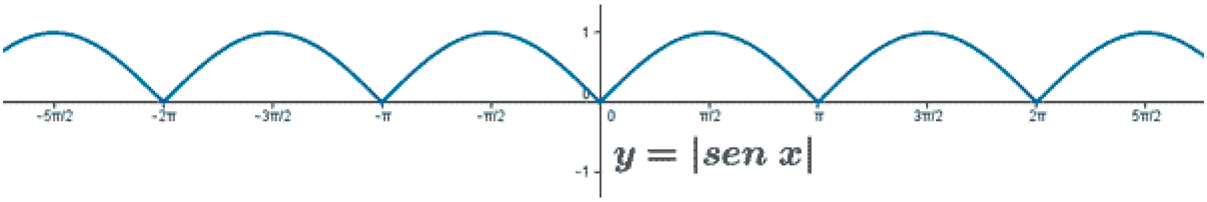
1. **f(x) = - sen x**

   La función resultante es simétrica respecto al eje X.



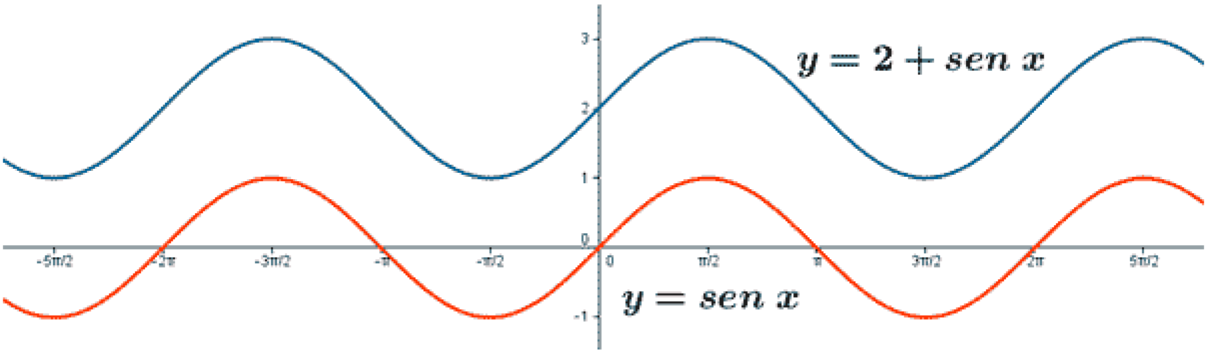
2. **f(x) = |sen x|**

   La función valor absoluto transforma los resultados negativos en positivos.



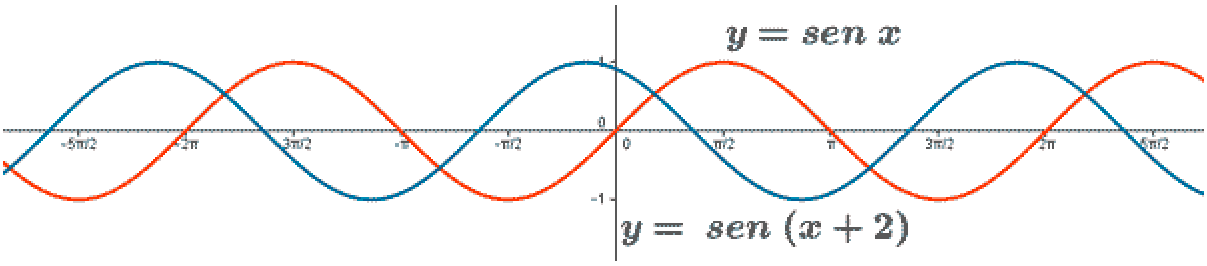
3. **f(x) = k + sen x**

   La función resultante es una traslación vertical hacía arriba de dos unidades.



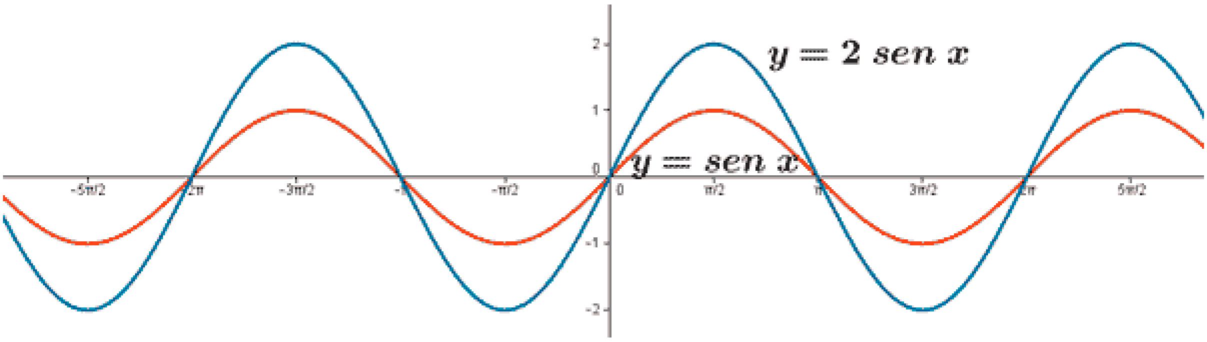
4. **f(x) = sen (x + k)**

   La función resultante es una traslación horizontal hacía la izquierda de dos unidades.



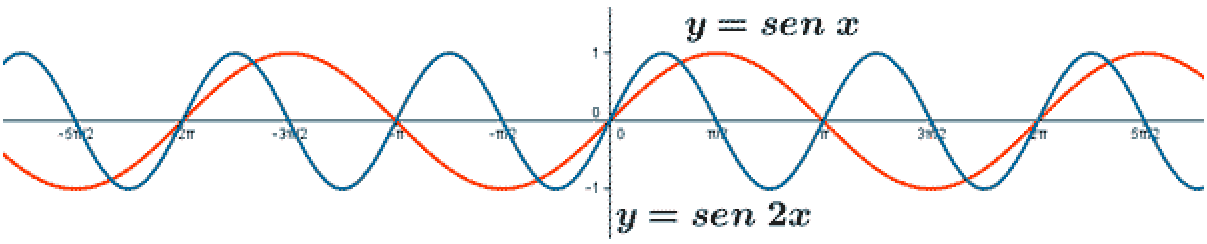
5. **f(x) = k·sen x**

   La función resultante multiplica los resultados de la función seno dos unidades.



6. **f(x) = sen (k·x)**

   La función resultante contrae a la función original.



- **Amplitud, periodo y traslación**

$$y = a\ \text{sen}\ (bx\ + c) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Amplitud} = |a| \\ \text{Periodo} = \dfrac{2\pi}{|b|} \\ \text{Traslación} \begin{cases} bx + c = 0 \\ bx + c = 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo

$$y = \frac{2}{3}\ \text{sen}\ \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Amplitud = |2/3| = 2/3

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$\text{Traslación:} \quad -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{10\pi}{3}$$

Función coseno

$$f(x) = \cos\ x = \text{sen}\left(\ x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Su gráfica será idéntica a la del seno pero con un desfase de π/2, es decir, se produce una traslación de π/2 a la izquierda.

Las características fundamentales de la función coseno son las siguientes:

1) Su dominio es R y es continua.
2) Su recorrido es $[-1, 1]$ ya que $-1 \leq \cos x \leq 1$
3) Corta al eje X en los puntos $\pi/2 + k\cdot\pi$ con $k \in Z$

   Corta al eje Y en el punto $(0, 1)$
4) Es par, es decir, simétrica respecto al eje Y.

$$\cos (x) = \cos (-x)$$

5) Es estrictamente creciente en los intervalos de la forma (a, b) donde

   $a = -\pi + 2\cdot k\cdot\pi$ y $b = 0 + 2\cdot k\cdot\pi$ siendo $k \in Z$

   Es estrictamente decreciente en los intervalos de la forma

   (a, b) donde $a = 0 + 2\cdot k\cdot\pi$ y $b = \pi + 2\cdot k\cdot\pi$ siendo $k \in Z$.
6) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma

   $(2\cdot k\cdot\pi, 1)$ con $k \in Z$.

   Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma

   $(\pi + 2\cdot k\cdot\pi, -1)$ con $k \in Z$.
7) Es periódica de periodo 2π

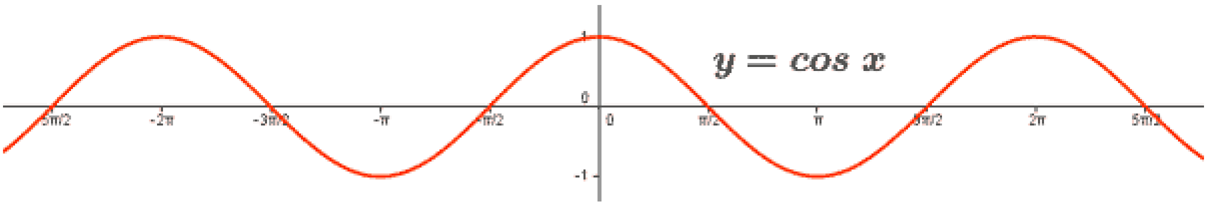
$$\cos (x) = \cos (x + 2\pi)$$

   La función $f(x) = \cos (k\cdot x)$ es periódica de periodo $p = 2\pi/k$

   Para $|k|>1$ el periodo disminuye y para $0< |k| <1$ el periodo aumenta.
8) Está acotada superiormente por 1 e inferiormente por - 1.

$f(x) = \cos\ x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Amplitud, periodo y traslación

$$y = a\cos\left(bx + c\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Amplitud} = |a| \\ \text{Periodo} = \dfrac{2\pi}{|b|} \\ \text{Traslación} \begin{cases} bx + c = 0 \\ bx + c = 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

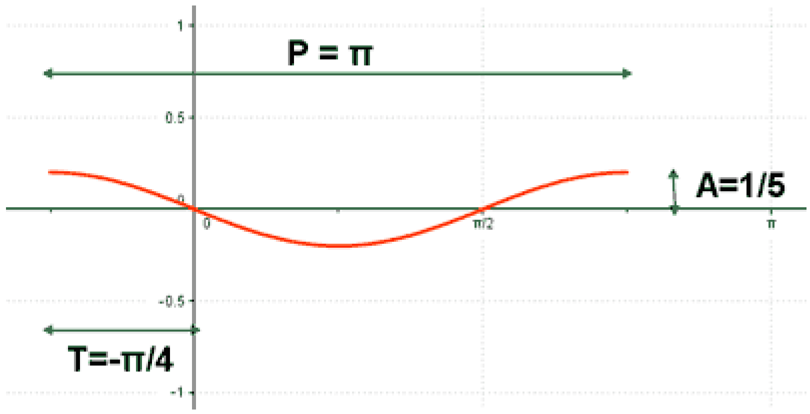
Ejemplo:

$$y = \frac{1}{5}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Amplitud = |1/5| = 1/5

Periodo = 2π/|2| = 2π/2 = π

Traslación: 2x + π/2 = 0 ⇒ x = - π/4
2x + π/2 = 2π ⇒ x = 3π/4



Función tangente

Se define la función tangente como la razón entre la función seno y la función coseno:

$$f(x) = \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos\, x}$$

Las características fundamentales de la función tangente son las siguientes:

1) Su dominio es R - {π/2 + k·π con k∈Z}

2) Es discontinua en los puntos π/2 + k·π con k∈Z.

3) Su recorrido es R

4) Corta al eje X en los puntos k·π con k∈Z.

Corta al eje Y en el punto (0, 0).

5) Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

$$tg(-x) = -tg(x)$$

6) Es estrictamente creciente en todo su dominio.

7) No tiene máximos ni mínimos.

8) Es periódica de periodo π

$$tg(x) = tg(x + \pi)$$

La función $f(x) = tg(k \cdot x)$ es periódica de periodo $p = \pi/k$

Para $|k|>1$ el periodo disminuye y para $0< |k| <1$ el periodo aumenta.

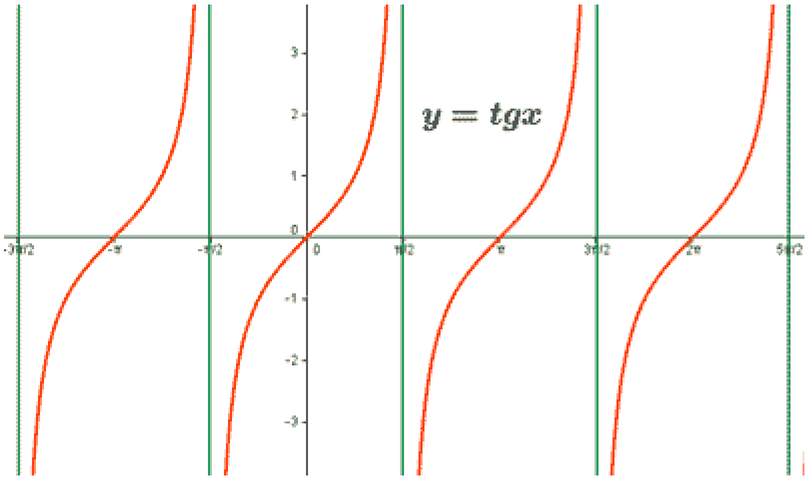
9) Las rectas $y = \pi/2 + k\cdot\pi$ con $k \in Z$ son asíntotas verticales.

10) No está acotada.

$f(x) = \operatorname{tg} x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
y	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D.	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

N.D.: No Definida



Periodo, traslación y asíntotas verticales

$$y = a\,\mathrm{tg}\,(bx + c) \Rightarrow \begin{cases} \text{Periodo} = \dfrac{\pi}{|b|} \\[2ex] \text{Traslación} = -\dfrac{c}{b} \\[2ex] \text{Asíntotas verticales} \begin{cases} bx + c = -\dfrac{\pi}{2} \\[1ex] bx + c = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplo:

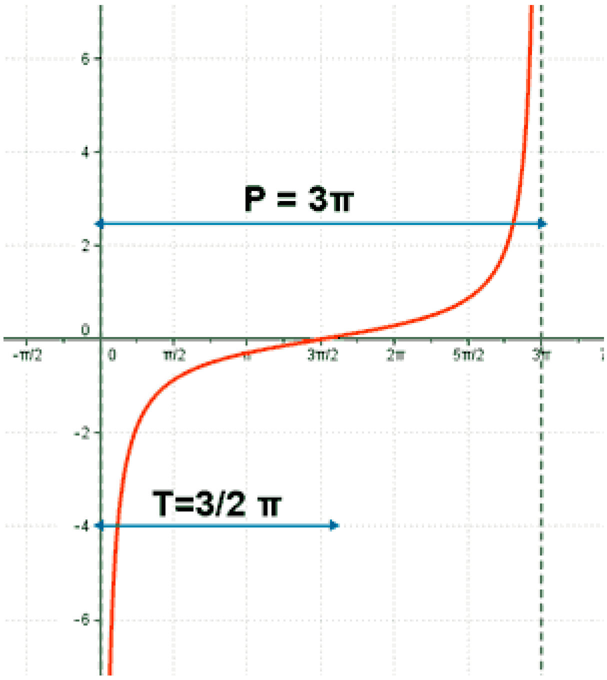
$$y = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Periodo} = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$$

$$\text{Traslación} = -\frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3\pi}{2} \quad \text{a la derecha}$$

$$\text{Asíntotas verticales:} \quad \frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{3} = \pi \quad \Rightarrow \quad x = 3\pi$$



Función cotangente

Se define la función cotangente como:

$$\text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x}$$

Por lo tanto, las propiedades se pueden deducir a partir de la función tangente.

Las características fundamentales de la función cotangente son las siguientes:

1) Su dominio es R - {π + k·π con k∈Z}.

2) Es discontinua en los puntos π + k·π con k∈Z

3) Su recorrido es R

4) Corta al eje X en los puntos π/2 + k·π con k∈Z.

No corta el eje Y

5) Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

$$\text{cotg}(-x) = -\text{cotg}(x)$$

6) Es estrictamente decreciente en todo su dominio.

7) No tiene máximos ni mínimos.

8) Es periódica de periodo π

$$\text{cotg}(x) = \text{cotg}(x + \pi)$$

La función f(x) = cotg (k·x) es periódica de periodo p = π/k

Para |k|>1 el periodo disminuye y para 0< |k| <1 el periodo aumenta.

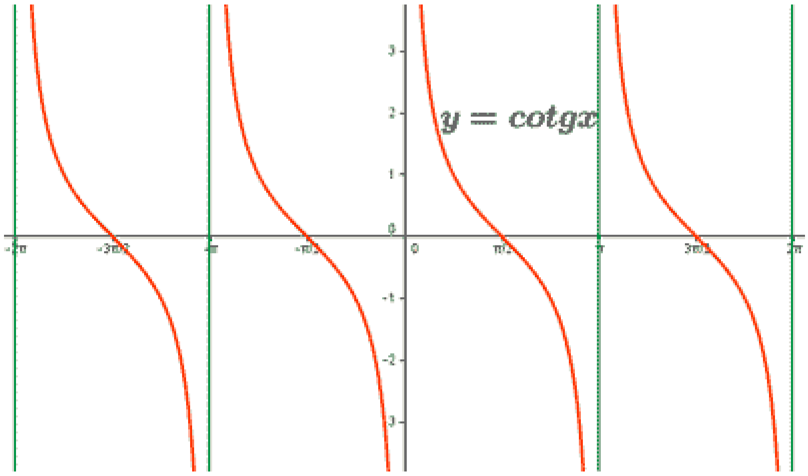
9) Las rectas y = k·π con k∈Z son asíntotas verticales.

10) No está acotada.

$f(x) = \text{cotg}\, x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
y	N.D.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D.	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D.

N.D.: No Definida



Función secante

Se define la función secante como:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por lo tanto, las propiedades se pueden deducir a partir de la función coseno.

Las características fundamentales de la función secante son las siguientes:

1) Su dominio es R - {π/2 + k·π} con k∈Z

2) Su recorrido es R - (- 1, 1)

3) No corta al eje X.

Corta al eje Y en el punto (0, 1)

4) Es par, es decir, simétrica respecto al eje Y.

$$\sec(-x) = \sec(x)$$

5) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma

$$(\pi + 2\cdot k\cdot\pi, -1) \text{ con } k\in Z.$$

Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma

$$(2\cdot k\cdot\pi, 1) \text{ con } k\in Z.$$

6) Es periódica de periodo 2π

$$\sec(x) = \sec(x + 2\pi)$$

7) Tiene asíntotas verticales en los puntos de la forma

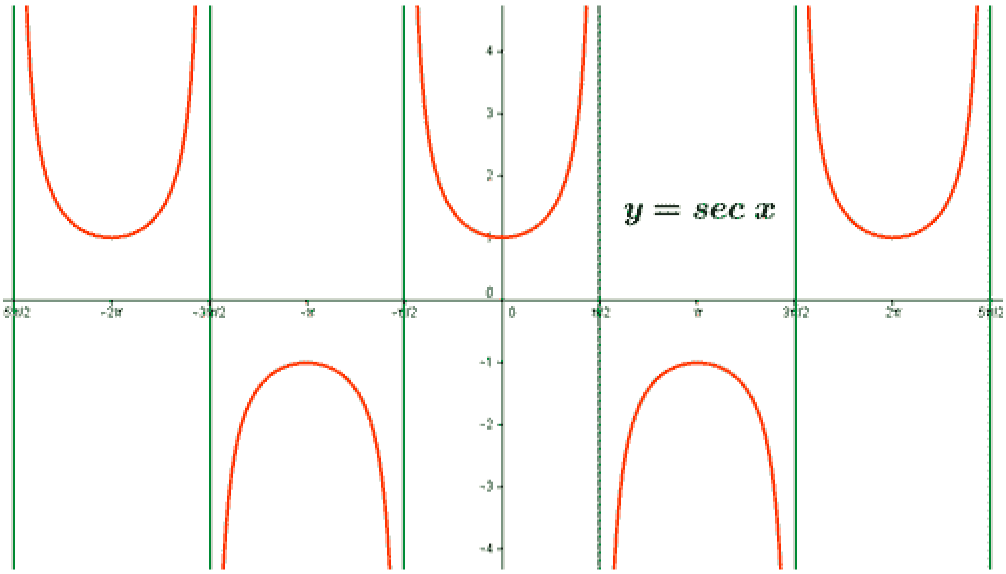
$$x = \pi/2 + k\cdot\pi \quad \text{con } k\in Z.$$

8) No está acotada.

$f(x) = \sec x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
y	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	N.D.	- 2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	- 1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	- 2	N.D.	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

N.D.: No Definida



Función cosecante

Se define la función cosecante como:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Por lo tanto, las propiedades se pueden deducir a partir de la función seno.

Las características fundamentales de la función cosecante son las siguientes:

1) Su dominio es $\mathbb{R} - \{k\cdot\pi\}$ con $k \in \mathbb{Z}$

2) Su recorrido es $\mathbb{R} - (-1, 1)$

3) No corta al eje X ni al eje Y.

4) Es impar, es decir, simétrica respecto al origen.

$$\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec}(x)$$

5) Tiene infinitos máximos relativos en los puntos de la forma

$$(-\pi/2 + 2\cdot k\cdot\pi, -1) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Tiene infinitos mínimos relativos en los puntos de la forma

$$(\pi/2 + 2\cdot k\cdot\pi, 1) \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

6) Es periódica de periodo 2π

$$\operatorname{cosec}(x) = \operatorname{cosec}(x + 2\pi)$$

7) Tiene asíntotas verticales en los puntos de la forma

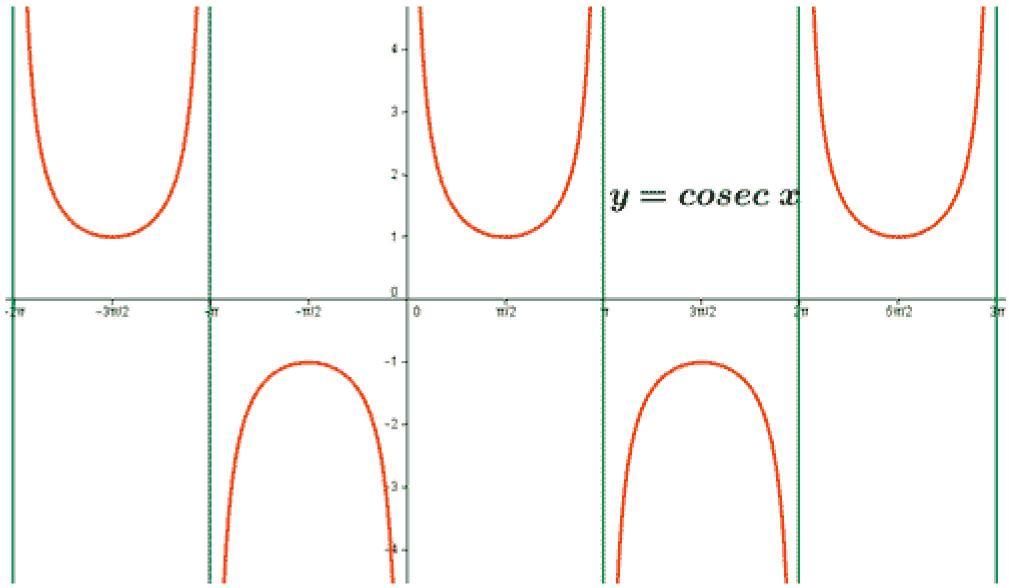
$$x = k\cdot\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

8) No está acotada.

$f(x) = \text{cosec}\, x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
	0º	30º	45º	60º	90º	120º	150º	180º	210º	240º	270º	300º	330º	360º
y	N.D.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D.	- 2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	- 1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	- 2	N.D.

N.D.: NO DEFINIDA

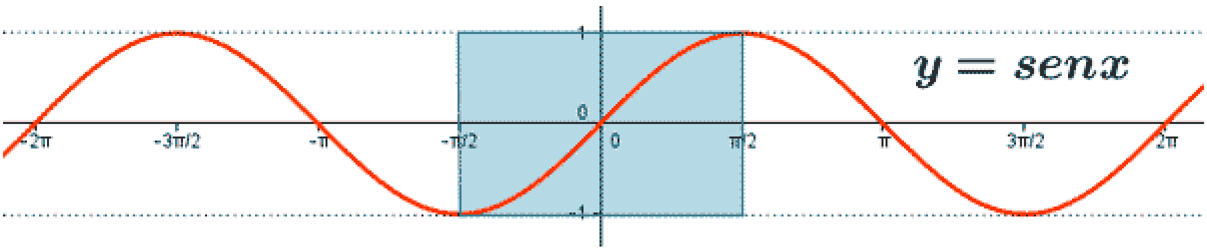


5. LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Para que una función tenga inversa, esta función tiene que ser inyectiva.

Las funciones trigonométricas no son inyectivas en todo su dominio, sólo en algunos intervalos, como se puede observar en la gráfica correspondiente.

$f(x) = \text{sen } x$ es inyectiva en $[-\pi/2, \pi/2]$.



La función arco seno

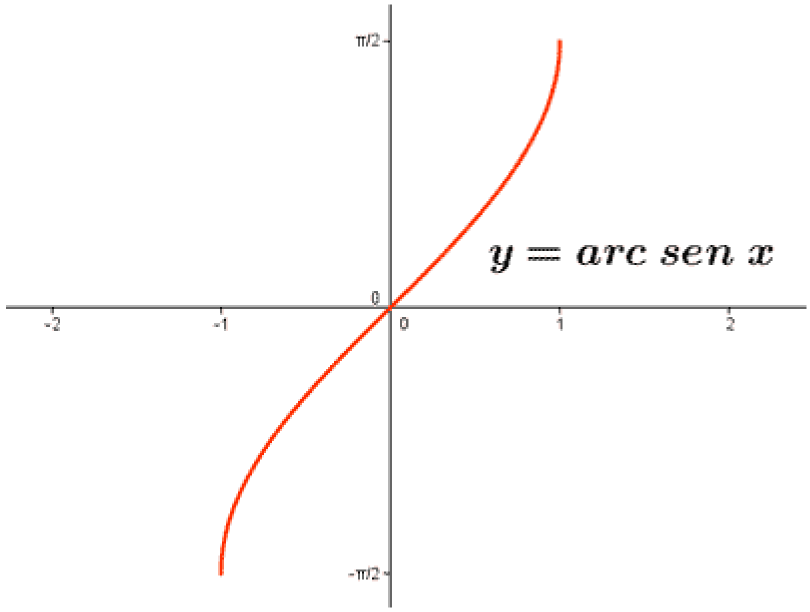
La función inversa de la función seno $f(x) = \text{sen } x$ se denomina arco seno y se representa por $f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$ o $f^{-1}(x) = \text{sen}^{-1}(x)$. Esta función da el valor del ángulo conociendo el valor del seno.

$$Si \quad \text{sen } x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{arc sen } y = x$$

El arco seno de x es el ángulo cuyo seno es x

$f(x) = arc \ \text{sen } x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



1) Su dominio es [-1, 1]

2) Su recorrido es [-π/2, π/2]

3) Puntos de corte:

La gráfica pasa por el punto (0, 0).

4) Es creciente en todo su dominio.

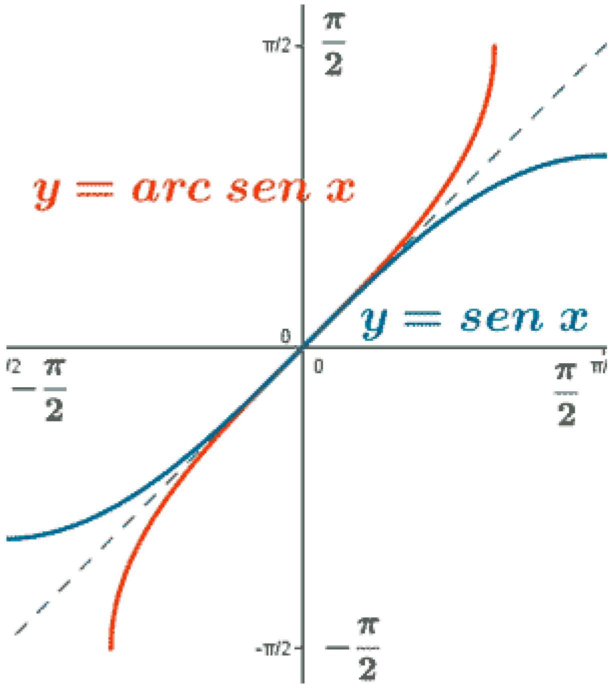
5) Es una función impar.

6) Máximo absoluto en (1, π/2) y mínimo absoluto en (-1, π/2).

No confundir**:**

$$\text{arc sen x} \neq \frac{1}{\text{sen x}}$$

Representación gráfica de las funciones seno y arco seno



La composición entre el seno y el arco coseno es la identidad:

$$\text{sen}\left(\text{arc sen}(x)\right) = x$$

$$\text{arc sen}\left(\text{sen}(x)\right) = x$$

Ambas funciones son simétricas respecto a la recta y = x.

Ejemplos:

Hallar:

arc sen (√3/2)

Se busca un ángulo **α** en el intervalo [-π/2, π/2] para el cual:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{con} \quad \frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Hallar:

$$\textbf{arc sen}\left(\textbf{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$$

La función arco seno es la función inversa de la función seno, luego en general se tiene que:

arc sen (sen(x)) = x

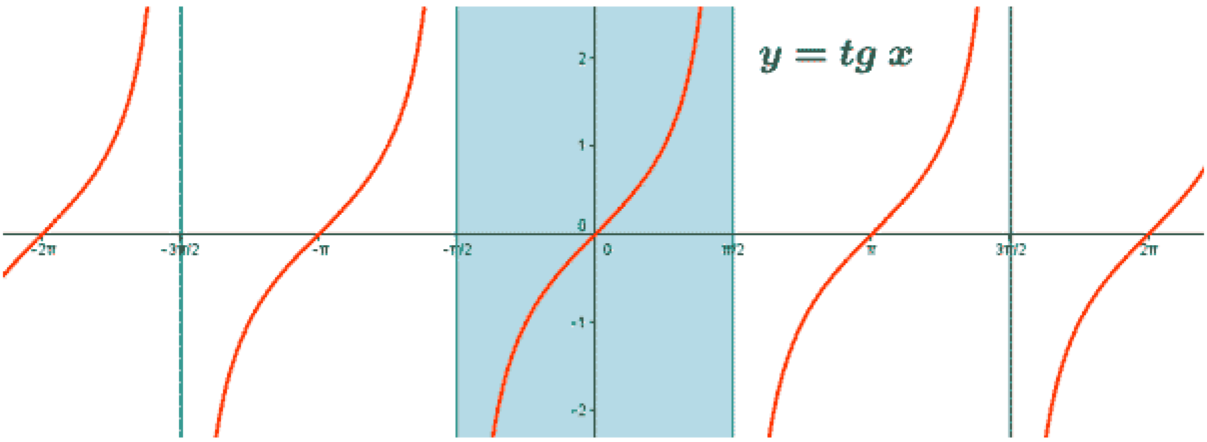
Por tanto:

$$\text{arc sen}\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}$$

Para que una función tenga inversa, esta función tiene que ser inyectiva.

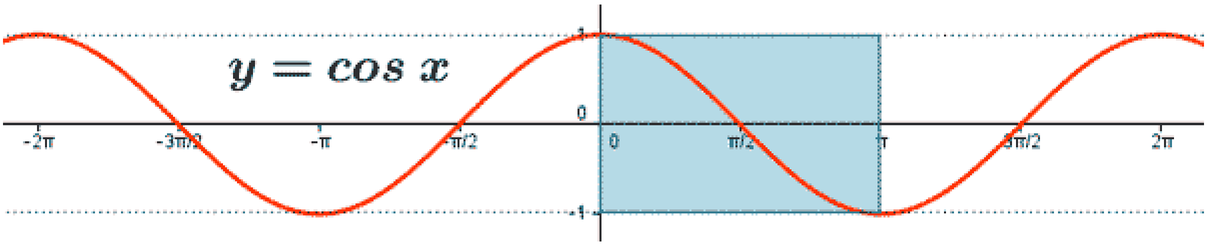
Las funciones trigonométricas no son inyectivas en todo su dominio, sólo en algunos intervalos, como se puede observar en la gráfica correspondiente.

f(x) = tg x es inyectiva en [-π/2, π/2].



La función arco coseno

f(x) = cos x es inyectiva en [0, π].



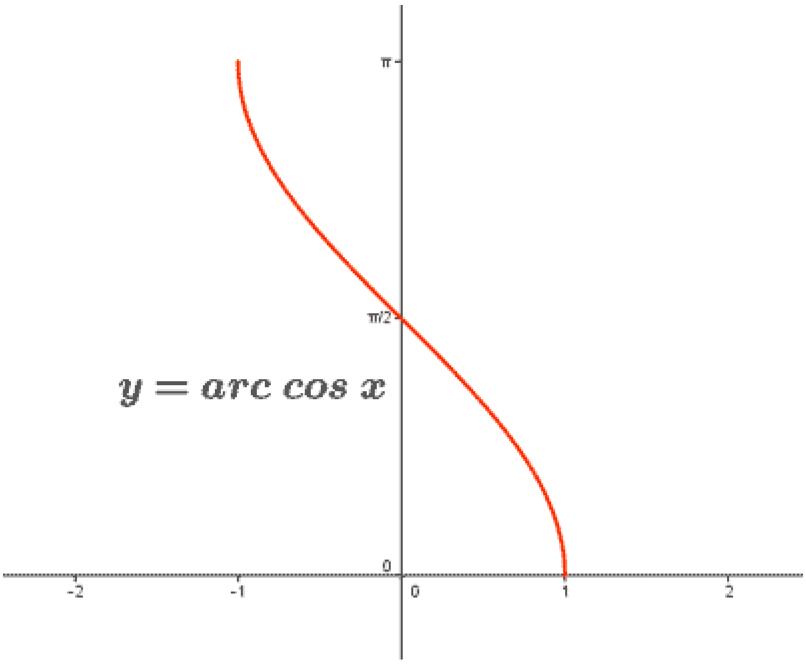
La función inversa de la función coseno f(x) = cos x se denomina arco coseno y se representa por f-1(x) = arc cos x o f-1(x) = cos-1(x). Esta función da el valor del ángulo conociendo el valor del coseno.

$$Si \quad \cos x = y \quad \Leftrightarrow \quad \text{arc} \cos y = x$$

El arco coseno de x es el ángulo cuyo coseno es x.

$f(x) = arc\ \cos x$

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0



1) Su dominio es [-1, 1].

2) Su recorrido es [0, π].

3) Puntos de corte:

- La gráfica corta al eje Y por el punto (0, π/2).
- La gráfica corta al eje X por el punto (1, 0).

4) Es decreciente en todo su dominio.

5) No es una función simétrica.

6) Máximo absoluto en (- 1, π) y mínimo absoluto en (1, 0).

No confundir:

$$\text{arc cos x} \neq \frac{1}{\text{cos x}}$$

La composición entre el seno y el arco coseno es la identidad:

$$\cos\left(\text{arc cos}(x)\right) = x$$

$$\text{arc cos}\left(\cos(x)\right) = x$$

Ambas funciones son simétricas respecto a la recta y = x.

La función arco tangente

La función inversa de la función tangente f(x) = tg x se denomina arco tangente y se representa por

$f^{-1}(x)$ = arc tg x o $f^{-1}(x) = tg^{-1}(x)$.

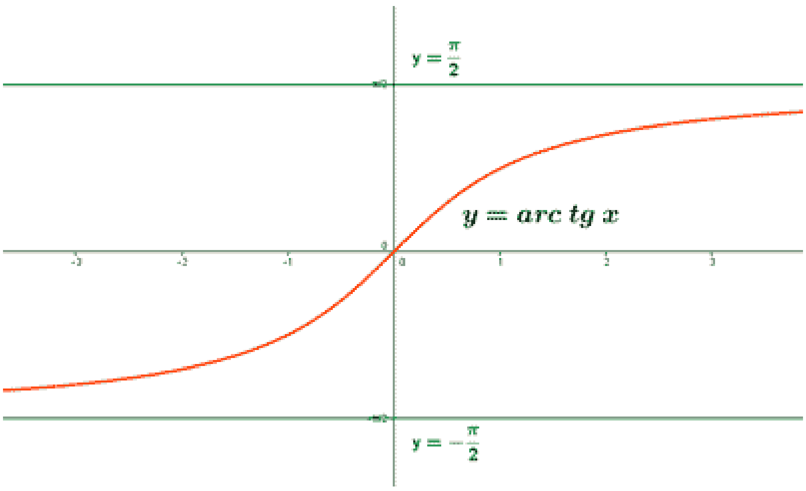
Esta función da el valor del ángulo conociendo el valor de la tangente.

$$Si \quad \operatorname{tg} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{arc\,tg} y = x$$

El arco tangente de x es un ángulo cuya tangente es x.

$f(x) = arc\ tg\ x$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$



1) Su dominio es R

2) Su recorrido es (-π/2, π/2)

3) Puntos de corte: La gráfica pasa por el punto (0, 0).

4) Es creciente en todo su dominio.

5) Es una función impar.

6) Está acotada inferiormente por $y = -\pi/2$ y superiormente por $y = \pi/2$.

7) La función tiene asíntotas horizontales en $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$.

$$\lim_{x \to -\infty} \text{arc tg x} = \frac{-\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \text{arc tg x} = \frac{\pi}{2}$$

No confundir:

$$\text{arc tg x} \neq \frac{1}{\text{tg x}}$$

La composición entre el seno y el arco coseno es la identidad:

$$\text{tg}\left(\text{arc tg}(\text{x})\right) = \text{x}$$

$$\text{arc tg}\left(\text{tg}(\text{x})\right) = \text{x}$$

Ambas funciones son simétricas respecto a la recta $y = x$.

Ejemplos:

Hallar:

arc tg (√3/3)

Se busca un ángulo α en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ para el cual:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{con} \quad \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\text{arc tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Hallar:

$$\text{arc tg}\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

La función arco tangente es la función inversa de la función tangente, luego en general (dentro de su dominio) se tiene que:

$$\text{arc tg}(\text{tg}(x)) = x$$

Por tanto:

$$\text{arc tg}\left(\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$$

6. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Una función definida a trozos es aquella cuyo dominio está dividido en intervalos disjuntos, y cada intervalo de la función viene dado por expresiones matemáticas distintas.

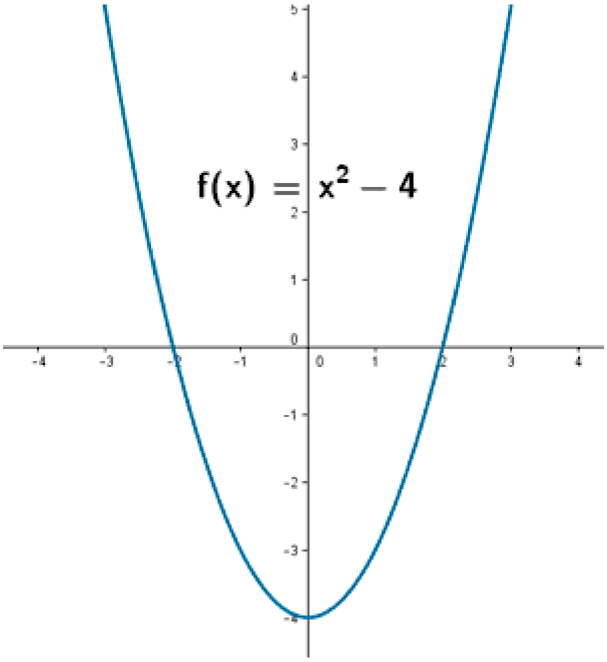
Una función a trozos puede estar definida en cada subintervalo por cualquier tipo de función.

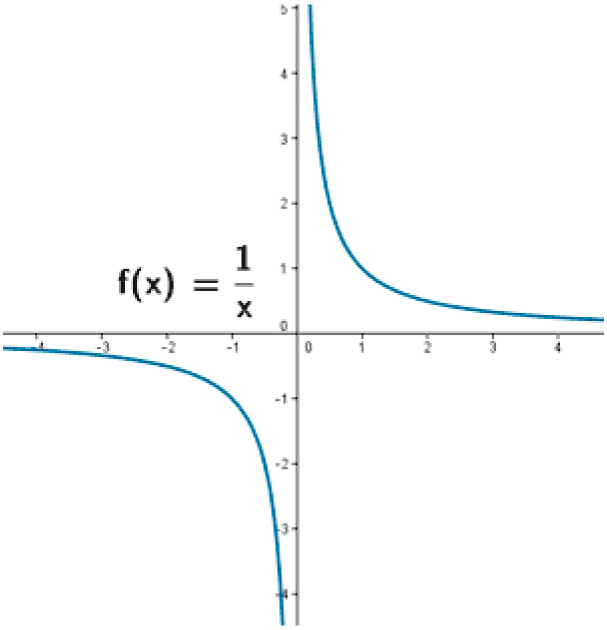
Ejemplo:

Representar la función a trozos siguiente:

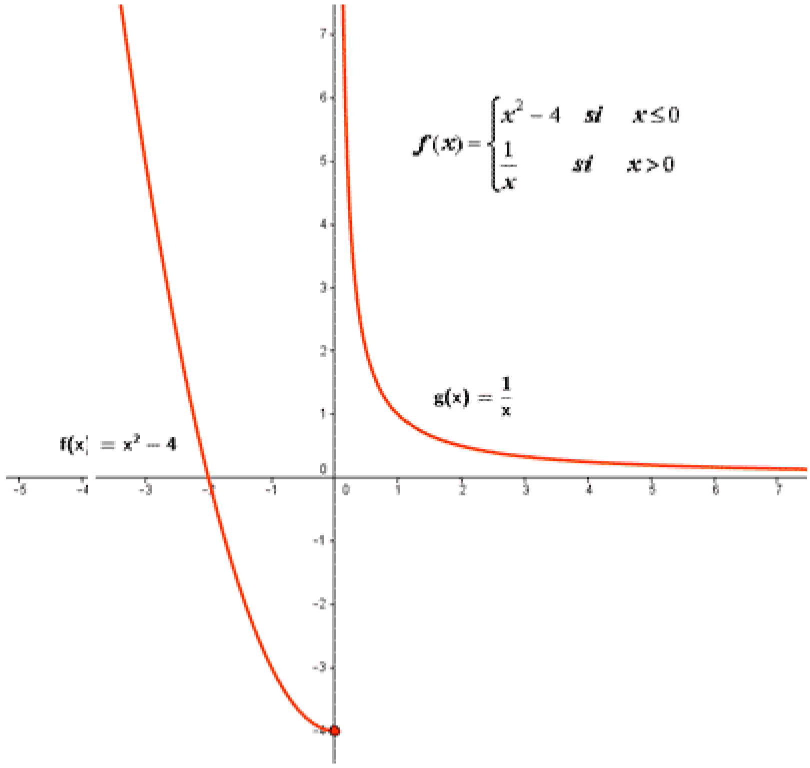
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de las funciones $g(x) = x^2 - 4$ y $h(x) = 1/x$



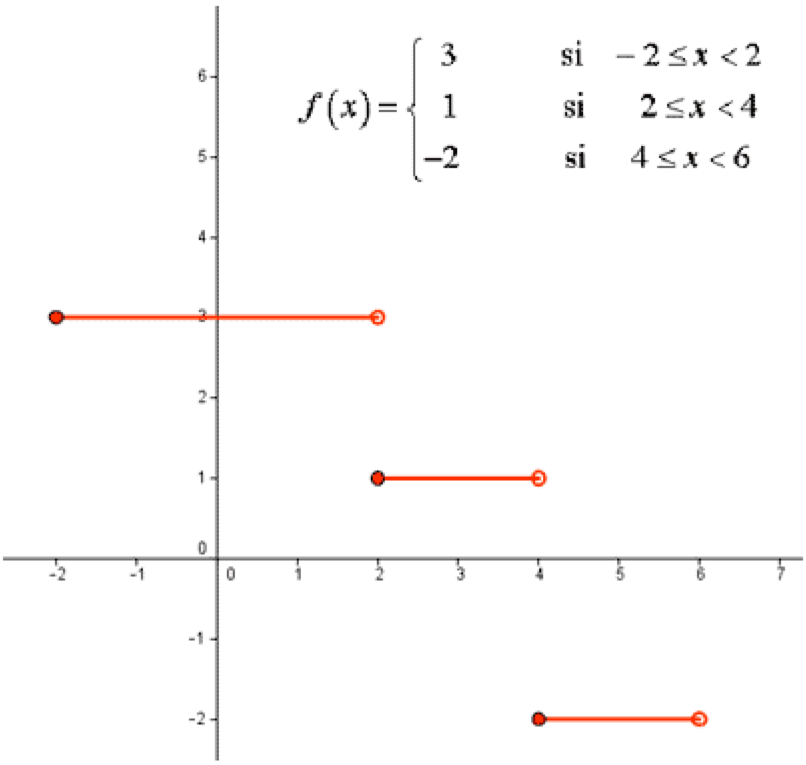


Se dibuja cada gráfica en el intervalo que está definida.



Función escalonada

Una función escalonada es una función a trozos que está definida en cada uno de sus subintervalos como una función constante.



En una función escalonada los peldaños no tienen por qué ser de la misma anchura; y no tienen por qué ser ascendentes o descendentes.

7. FUNCIÓN PARTE ENTERA DE X

Parte entera de x: función suelo entero

La función parte entera de x o función suelo entero es la que asigna a cada número real x el entero más próximo, pero que sea menor o igual que x.

Se representa por Ent(x), por medio de $\lfloor x \rfloor$, o bien [x].

$$\text{Ent}(x) = \lfloor x \rfloor : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Dom f = R , Im f = Z

La función parte entera se puede expresar como una función definida a trozos con infinitos tramos en los que la función es constante.

Ejemplos:

Ent(x) = $\lfloor x \rfloor$ = {n si x ∈ [n, n+1) con n ∈ Z}

$$\text{Ent}(x) = \begin{cases} \dots \\ -2 & \text{si } x \in [-2, -1) \\ -1 & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{si } x \in [1, 2) \\ \dots \end{cases}$$

f (- 1) = Ent (- 1) = - 1

f (- 0, 9) = Ent (- 0, 9) = - 1

f (- 0, 1) = Ent (- 0, 1) = - 1

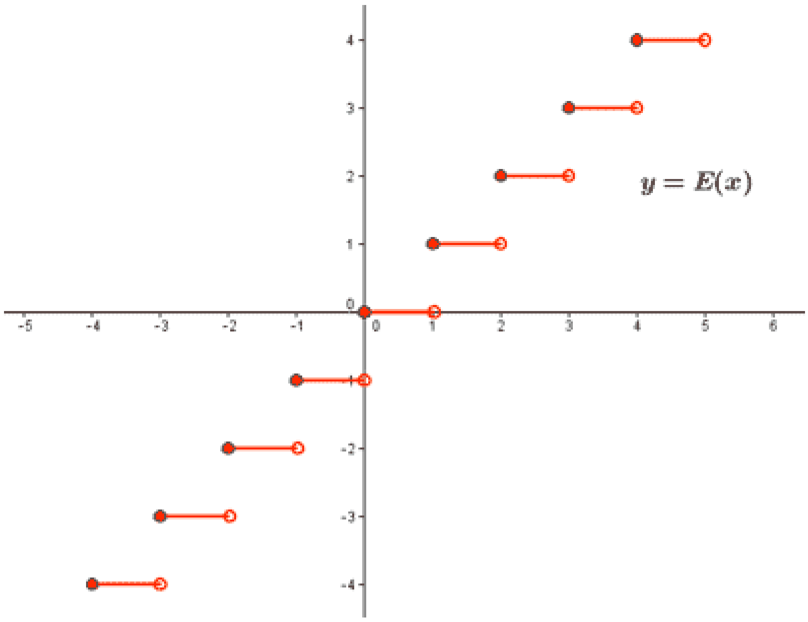
f (0, 1) = Ent (0, 1) = 0

f (0, 9) = Ent (0, 9) = 0

f (1) = Ent (1) = 1

f (1,1) = Ent (1,1) = 1

x	–3.4	–0.7	0	1.4	3.8	4.1
y	–4	–1	0	1	3	4



Representa la siguiente función con todas sus características:

y = Ent(x) + 3 = ⌊x⌋ + 3

$$\text{Ent}(x) + 3 = \begin{cases} \ldots\ldots \\ -1 & \text{si} \quad x \in [-4, -3) \\ 0 & \text{si} \quad x \in [-3, -2) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [-2, -1) \\ 2 & \text{si} \quad x \in [-1, 0) \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

f (- 1) = Ent (- 1) + 3 = - 1 + 3 = 2

f (- 0, 9) = Ent (- 0, 9) + 3 = - 1 + 3 = 2

f (- 0, 1) = Ent (- 0, 1) + 3 = - 1 + 3 = 2

f (0, 1) = Ent (0, 1) + 3 = 0 + 3 = 3

f (0, 9) = Ent (0, 9) + 3 = 0 + 3 = 3

f (1) = Ent (1) + 3 = 1 + 3 = 4

f (1, 1) = Ent (1, 1) + 3 = 1 + 3 = 4

Dom (f) = R

Im (f) = Z

Ent(x) + 3 = {n + 3 si x ∈ [n, n+1) con n ∈ Z**}**

Puntos de corte:

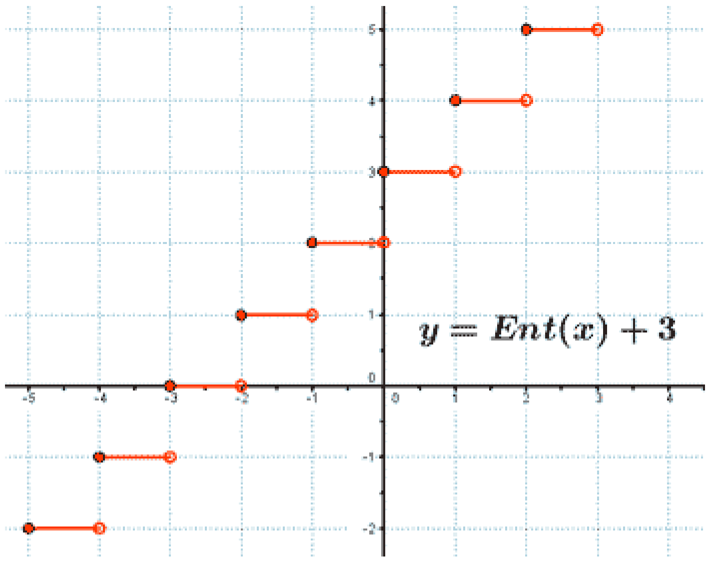
- Para x = 0 tenemos que f(0) = 3 ⇒ El punto de corte es (0, 3)
- Para que f(x) = 0 ⇒ Ent(x) + 3 = 0 ⇒ Ent(x) = - 3 ⇒ Los puntos de corte son todos los puntos del intervalo [- 3, -2)

Monotonía:

La función parte entera siempre toma valores constantes, por lo tanto no es creciente ni decreciente.

Máximos y mínimos:

No tiene máximos ni mínimos.



Representa la siguiente función con todas sus características:

y = Ent(x/2) = ⌊x/2⌋

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{x}{2}\right) = \begin{cases} \ldots\ldots & \\ -1 & \text{si} \quad x \in [-2, 0) \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0, 2) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [2, 4) \\ 2 & \text{si} \quad x \in [4, 6) \\ \ldots\ldots & \end{cases}$$

f (- 1) = Ent (- 0.5) = - 1

f (- 0, 8) = Ent (- 0, 4) = - 1

f (- 0, 2) = Ent (- 0, 1) = - 1

f (0, 2) = Ent (0, 1) = 0

f (0, 8) = Ent (0, 4) = 0

f (1) = Ent (0, 5) = 0

f (3, 6) = Ent (1, 8) = 1

Dom (f) = R

Im (f) = Z

Ent(x/2) = {n   si x/2 ∈ [n, n+2)   con n ∈ Z**}**

Puntos de corte:

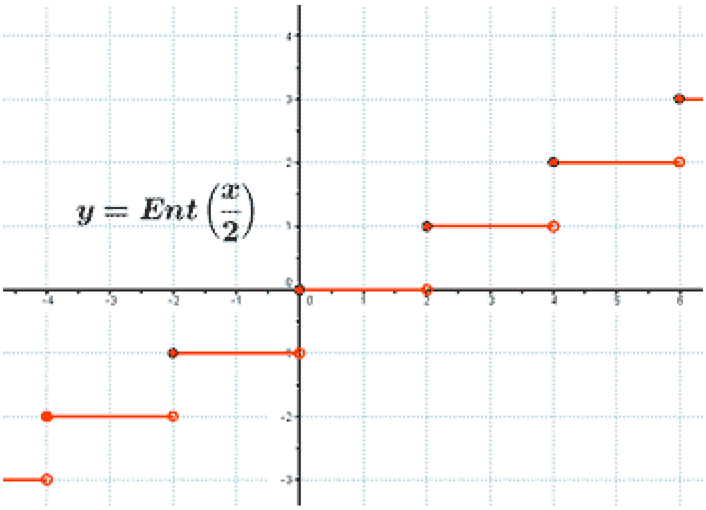
- Para x = 0 tenemos que f(0) = 0 ⇒ El punto de corte es (0, 0)
- Para que f(x) = 0 ⇒ Ent(x/2) = 0 ⇒ Los puntos de corte son todos los puntos del intervalo [0, 2).

Monotonía:

La función parte entera siempre toma valores constantes, por lo tanto no es creciente ni decreciente.

Máximos y mínimos:

No tiene máximos ni mínimos.



Parte entera de x: función techo entero

La función techo entero de x es la que asigna a cada número real x el entero más próximo, pero que sea mayor o igual que x.

Se representa por medio de $\lceil x \rceil$.

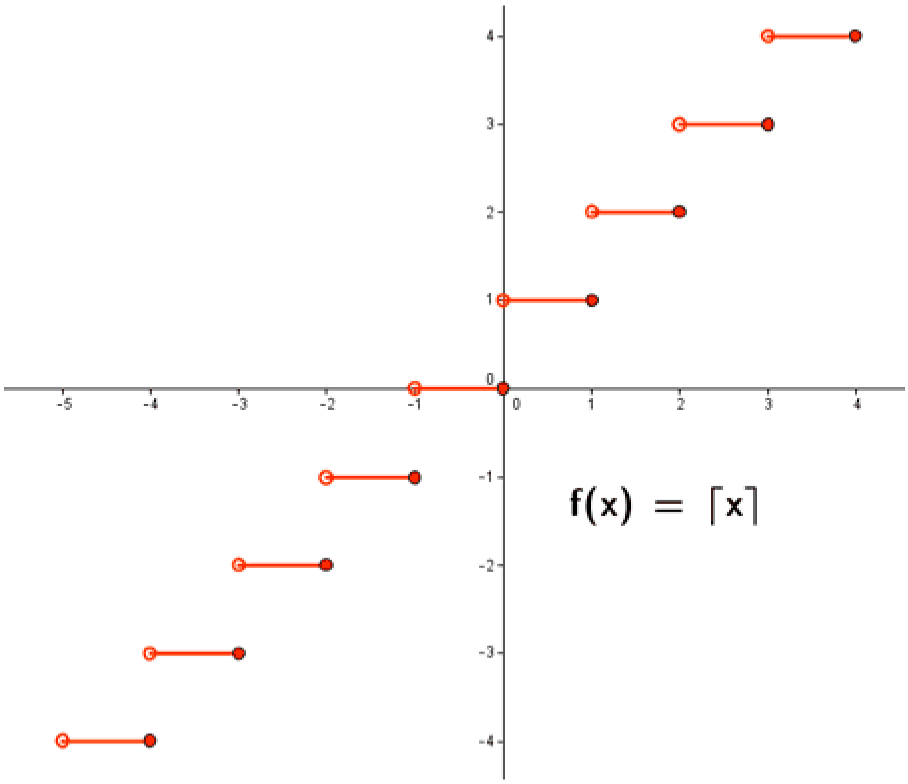
$$\lceil x \rceil : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Dom f = R , Im f = Z

Ejemplo de una función techo es el coste de aparcar x horas en un aparcamiento que cobra 1,5€ por cada hora o fracción de hora.

$f(x) = \lceil x \rceil$

x	–3.4	-0.7	0	1.4	3.8	4.1
y	–3	0	0	2	4	5



8. FUNCION PARTE DECIMAL. FUNCION DISTANCIA

Función mantisa o parte decimal de x: Dec(x)

Se define la función parte decimal de x, o función mantisa, como la que asigna a cada número real x su parte decimal.

$$Dec(x) = x - Ent(x)$$

Monotonía:

La función parte decimal es creciente en todo su dominio.

Máximos y mínimos:

La función tiene mínimos absolutos en todos los puntos de abscisa entera.

La función no tiene ni máximos absolutos ni relativos.

Periodicidad:

La función tiene periodo 1 ya que $f(x + 1) = f(x)$

Acotación:

La función está acotada superior e inferiormente.

La cota superior es 1 o cualquier número superior a 1.

La menor de todas las cotas superiores recibe el nombre de extremo superior o supremo, que en este caso es 1.

La cota inferior es 0 o cualquier número inferior a 0.

La mayor de todas las cotas inferiores recibe el nombre de extremo inferior o ínfimo, que en este caso es 0. Además es mínimo porque pertenece a la imagen de la función.

$$f(-3) = Dec(-3) = -3 - Ent(-3) = -3 - (-3) = 0$$

f (- 2,9) = Dec (- 2,9) = - 2,9 - Ent (- 2,9) = - 2,9 - (- 3) = 0,1

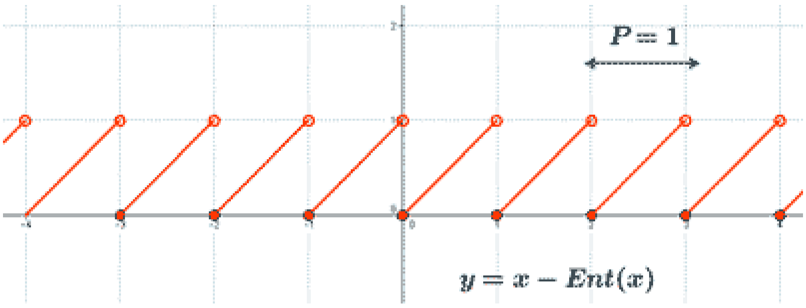
f (- 2,1) = Dec (- 2,1) = - 2,1 - Ent (- 2,1) = - 2,1 - (- 3) = 0,9

f (- 0,2) = Dec (- 0,2) = - 0,2 - Ent (- 0,2) = - 0,2 - (- 1) = 0,8

f (0,2) = Dec(0,2) = 0,2 - Ent(0,2) = 0,2 - 0 = 0,2

f (1,2) = Dec(1,2) = 1,2 - Ent(1,2) = 1,2 - 1 = 0,2

f (8,2) = Dec (8,2) = 8,2 - Ent (8,2) = 8,2 - 8 = 0,2



Función distancia de x al entero más próximo

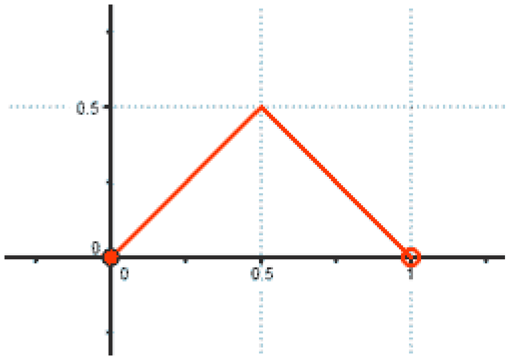
La función distancia de x al entero más próximo se define como:

$$y = 0,5 - | Dec(x) - 0,5 |$$

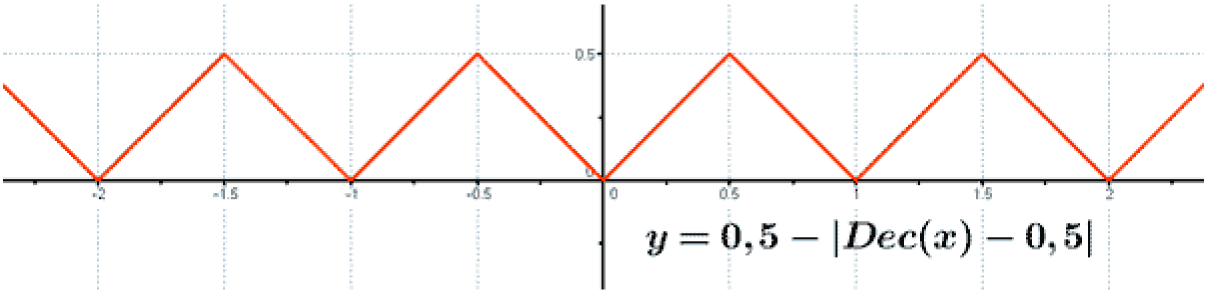
$$y = d(x, Z)$$

La función es periódica de periodo 1, se cumple que f(x + 1) = f(x) para todo valor de x. Por lo tanto, basta con estudiarla en el intervalo [0, 1)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si} \quad \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$



La gráfica de la función en todo R es la siguiente:



f (-2) = 0,5 - |Dec (-2) - 0,5| = 0,5 - |-2 - Ent (-2) - 0,5| = 0,5 - |-2 - (-2) - 0,5| = 0,5 - |-0,5| = 0,5 - 0,5 = 0

f (-1,9) = 0,5 - |Dec (-1,9) - 0,5| = 0,5 - |-1,9 - Ent (-1,9) - 0,5| = 0,5 - |-1,9 - (-2) - 0,5| = 0,5 - |-0,4| = 0,5 - 0,4 = 0,1

f (-1,4) = 0,5 - |Dec (-1,4) - 0,5| = 0,5 - |-1,4 - Ent (-1,4) - 0,5| = 0,5 - |-1,4 - (-2) - 0,5| = 0,5 - |0,1| = 0,5 - 0,1 = 0,4

f (-0,3) = 0,5 - |Dec (-0,3) - 0,5| = 0,5 - |-0,3 - Ent (-0,3) - 0,5| = 0,5 - |-0,3 - (-1) - 0,5| = 0,5 - |0,2| = 0,5 - 0,2 = 0,3

f (0,1) = 0,5 - |Dec (0,1) - 0,5| = 0,5 - |0,1 - Ent (0,1) - 0,5| = 0,5 - |0,1 - 0 - 0,5| = 0,5 - |-0,4| = 0,5 - 0,4 = 0,1

f (1,1) = 0,5 - |Dec (1,1) - 0,5| = 0,5 - |1,1 - Ent (1,1) - 0,5| = 0,5 - |1,1 - 1 - 0,5| = 0,5 - |-0,4| = 0,5 - 0,4 = 0,1

Otra forma de calcular los valores para dicha función es aplicar directamente la definición de la distancia al número entero más cercano:

f (-2) = 0,5 - |Dec (-2) - 0,5| =......... = 0

f (-1,9) = 0,5 - |Dec (-1,9) - 0,5| =.... = 0,1

f (-1,4) = 0,5 - |Dec (-1,4) - 0,5| =.... = 0,4

f (-0,3) = 0,5 - |Dec (-0,3) - 0,5| =.... = 0,3

f (0,1) = 0,5 - |Dec (0,1) - 0,5| =....... = 0,1

f (1,1) = 0,5 - |Dec (1,1) - 0,5| =....... = 0,1

⇒ d (-2, Z) = d (-2, -2) = 0

⇒ d (-1,9, Z) = d (-1,9, -2) = 0,1

⇒ d (-1,4, Z) = d (-1,4, -1) = 0,4

⇒ d (-0,3, Z) = d (-0,3, 0) = 0,3

⇒ d (0,1, Z) = d (0,1, 0) = 0,1

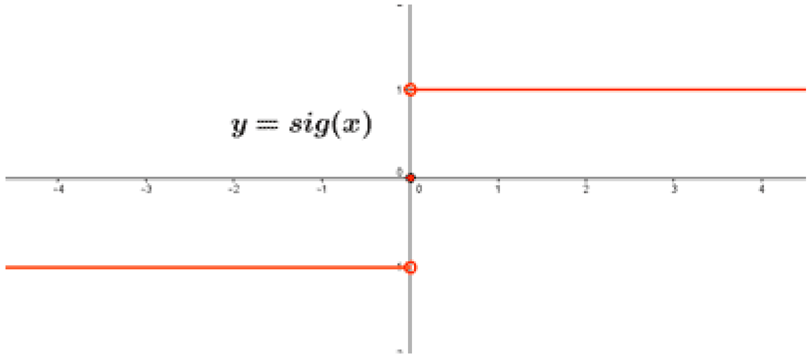
⇒ d (1,1, Z) = d (1,1, 1) = 0,1

9. Signo de x: sig(x)

La función signo es la función que asigna a los números positivos, 1; a los números negativos, - 1; y al cero, el 0.

$$\mathbf{f(x) = sig(x)}$$

$$sig(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

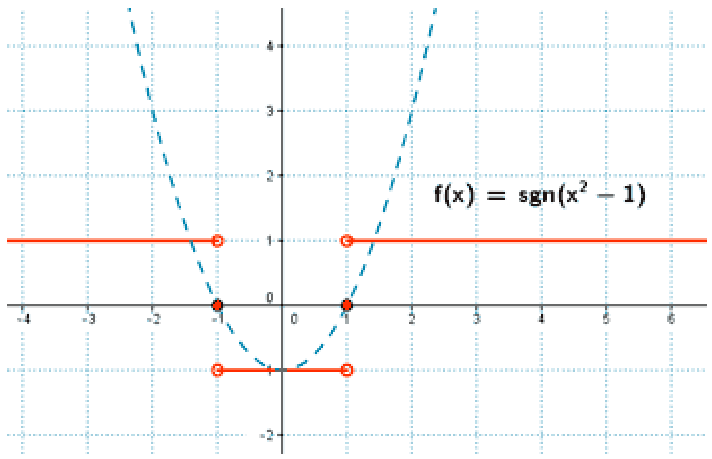


$$\mathbf{f(x) = sig\left(x^2 - 1\right)}$$

Escribimos la función dada como una función a trozos:

$$f(x) = sig\left(x^2 - 1\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^2 - 1 > 0 \\ 0 & \text{si } x^2 - 1 = 0 \\ -1 & \text{si } x^2 - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \text{ ó } x = -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = sig\left(x^2 - 1\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



LIMITES DE FUNCIONES

1. Cálculo de límites de funciones elementales y límites que conviene conocer.

- Función constante
- Función identidad
- Función potencial de exponente natural
- Función potencial de exponente entero negativo
- Función exponencial
- Función logarítmica
- Límites que conviene conocer

2. Asíntotas

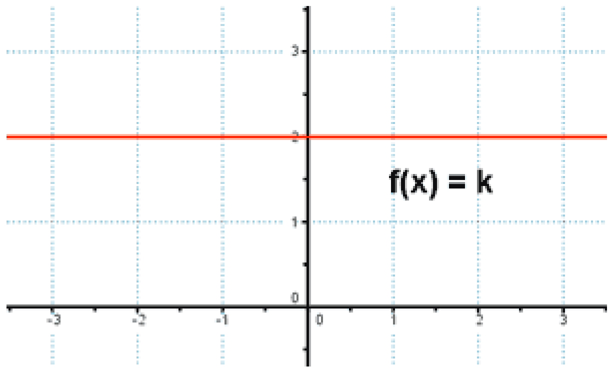
- Asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas.

LIMITES DE FUNCIONES

1. CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES ELEMENTALES Y LÍMITES QUE CONVIENE CONOCER

FUNCIÓN CONSTANTE

f(x) = K



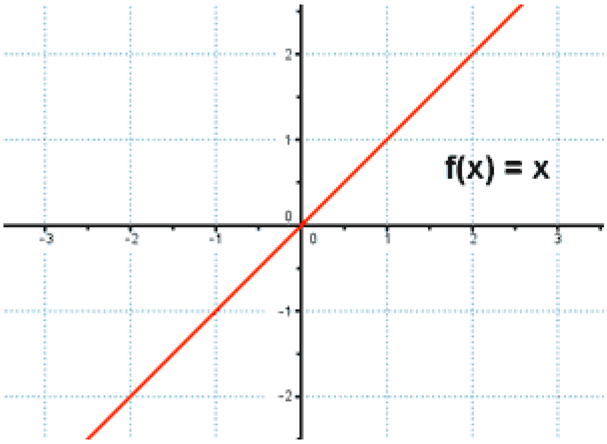
$$\lim_{x \to a} k = k$$

$$\lim_{x \to +\infty} k = k$$

$$\lim_{x \to -\infty} k = k$$

FUNCIÓN IDENTIDAD

f(x) = x



$$\lim_{x \to a} x = a$$

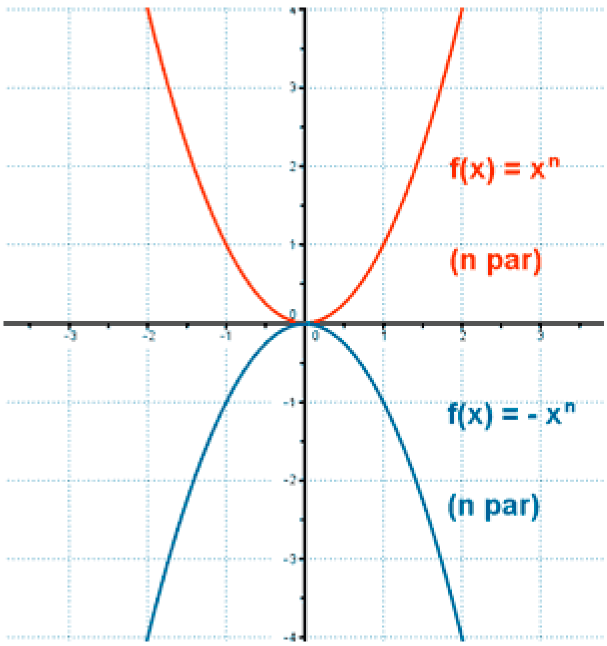
$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE NATURAL

$f(x) = x^n$, $n \in N$, $n \geq 2$, n par

$f(x) = - x^n$, $n \in N$, $n \geq 2$, n par



$$f(x) = x^n \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ \text{par} \end{cases}$$

$$f(x) = -x^n \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ \text{par} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \to a} -x^n = -a^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

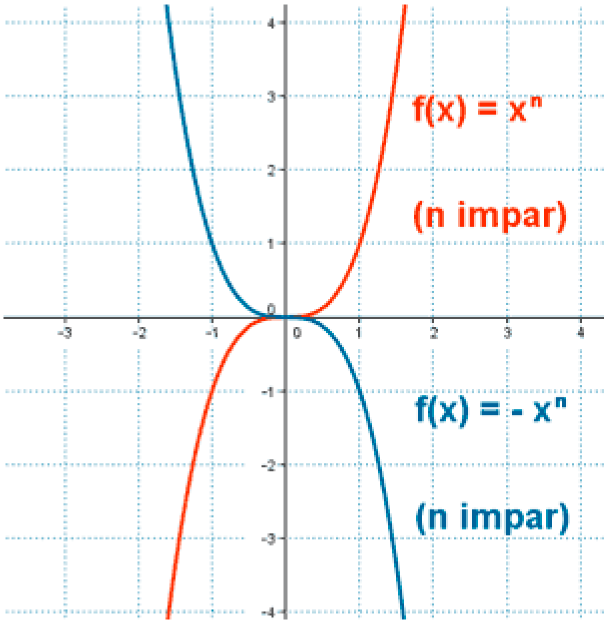
$$\lim_{x \to +\infty} -x^n = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} -x^n = -\infty$$

f(x) = x^n , n ∈ N, n ≥ 2 , n impar

f(x) = - x^n , n ∈ N, n ≥ 2 , n impar



$$f(x) = x^n \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ \text{impar} \end{cases}$$

$$f(x) = -x^n \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ \text{impar} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x \to a} -x^n = -a^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} -x^n = -\infty$$

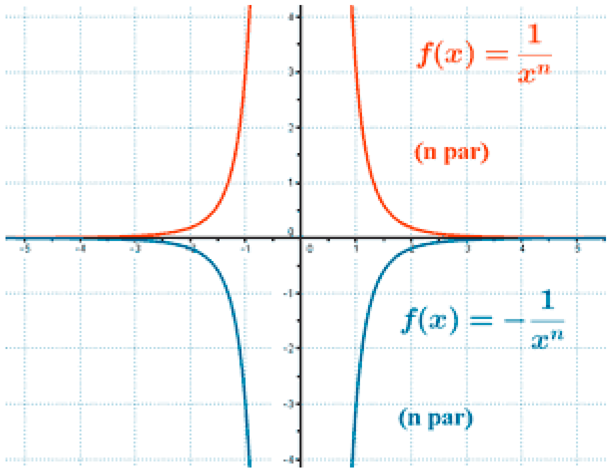
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} -x^n = +\infty$$

FUNCIÓN POTENCIAL DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N} \;,\; n \geq 2 \;,\; n \text{ par}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N} \;,\; n \geq 2 \;,\; n \text{ par}$$



$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \text{ par} \end{cases} \qquad\qquad f(x) = -\frac{1}{x^n} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \text{ par} \end{cases}$$

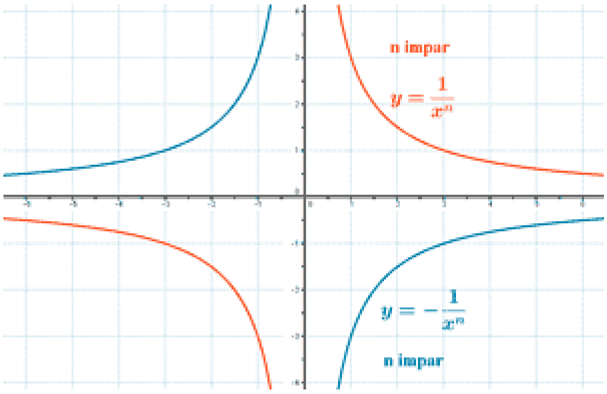
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n} \qquad\qquad \lim_{x \to a} -\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{a^n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^n} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 2 \ , \ n \text{ impar}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N} \ , \ n \geq 2 \ , \ n \text{ impar}$$



$$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ \text{impar} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$f(x) = -\frac{1}{x^n} \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \ \text{impar} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} -\frac{1}{x^n} = -\frac{1}{a^n}$$

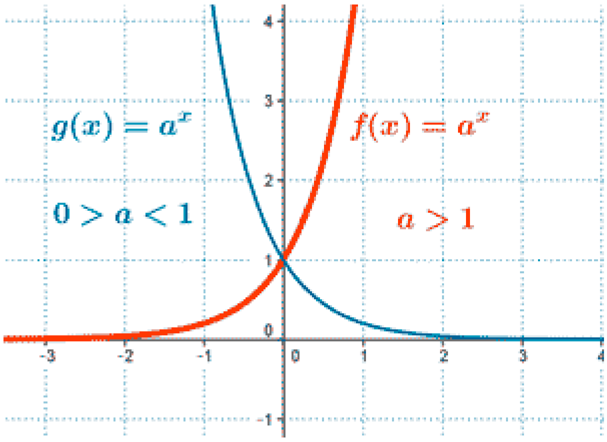
$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^n} = 0$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

f(x) = a^x , a > 0 , a ≠ 1

g(x) = a^x , 0 > a > 1 , a ≠ 1



$$f(x) = a^x \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

$$f(x) = a^x \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

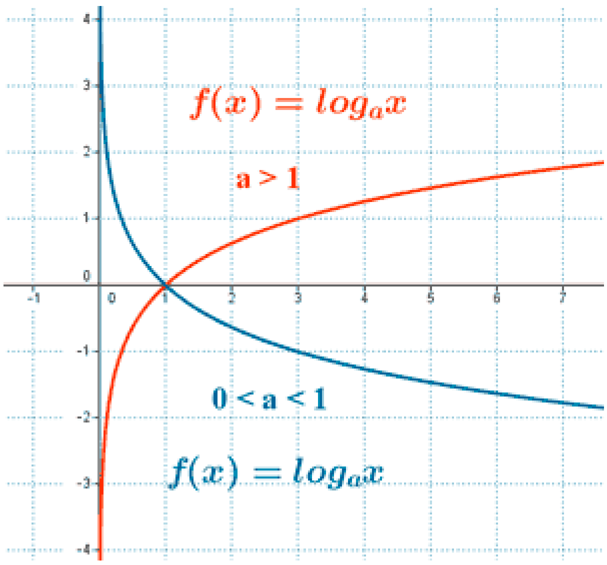
$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$f(x) = \log_a x \quad , \quad a > 1 \quad , \quad a \neq 1$

$f(x) = \log_a x \quad , \quad 0 < a < 1 \quad , \quad a \neq 1$



$$f(x) = \log_a x \quad \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \log_a x \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \log_a x = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \log_a x = 0$$

LÍMITES QUE CONVIENE CONOCER

- **No existen:**

$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x \qquad \lim_{x \to \infty} \cos x \qquad \lim_{x \to \infty} \operatorname{tg} x$$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$$

- **Infinitos:**

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{Ln} x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{Ln} x = +\infty$$

- **Finitos:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{Ln} x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{a^x} = 0 \quad \text{si} \quad a > 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}$$

2. ASINTOTAS

Una función puede tener tramos en los que la función se aleja indefinidamente. Estos tramos se llaman ramas infinitas de la función.

Cuando una rama infinita se acerca indefinidamente a una recta se llama asíntota, y la rama infinita se denomina rama asintótica**.**

ASÍNTOTAS VERTICALES

Una función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

Para hallar las asíntotas verticales se resuelve la ecuación que se obtiene al igualar a cero el denominador, tomando únicamente las raíces que no lo sean del numerador.

Para conocer la posición de la curva respecto de las asíntotas se hallan los límites laterales.

Ejemplo de cálculo de asíntotas verticales:

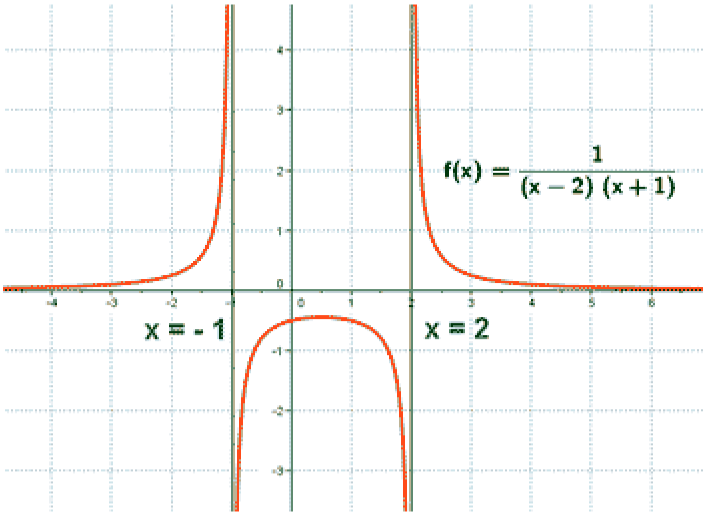
Calcula las asíntotas verticales de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$$

Las asíntotas verticales corresponden a los valores que anula al denominador

Las raíces son:

- $x_1 = -1$
- $x_2 = 2$



Para conocer la **posición de la curva respecto a la asíntota** calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{(-1^- + 1)(-1^- - 2)} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{(-1^+ + 1)(-1^+ - 2)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{(2^- + 1)(2^- - 2)} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{(2^+ + 1)(2^+ - 2)} = \frac{1}{0} = +\infty$$

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Una función f(x) tiene una asíntota horizontal en y = k si:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$$

Para hallar la asíntota horizontal en y = k se halla el siguiente límite:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = k$$

Para conocer la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, se hallan:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - k\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} - k\right)$$

Si el límite tiende a 0^+ la curva está encima de la asíntota y si tiende a 0^- está debajo.

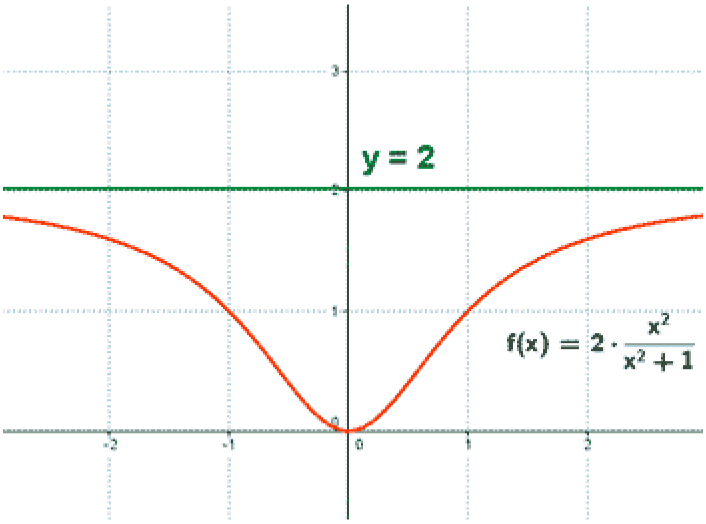
Ejemplo de cálculo de asíntotas horizontales:

Calcula las asíntotas horizontales de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Para hallar las asíntotas horizontales calculamos el límite en el infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \left(2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1}\right) = 2 \cdot \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1}\right) = 2$$



Para hallar la posición de la curva respecto a la asíntota calculamos los límites en el infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2 + 1} - 2 \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2}{x^2 + 1} \right) = \frac{-2}{\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2}{x^2 + 1} - 2 \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2}{x^2 + 1} \right) = \frac{-2}{\infty} = 0^-$$

La curva está debajo de la asíntota.

ASÍNTOTAS OBLICUAS

ASÍNTOTAS OBLICUAS LINEALES

Una función f(x) tiene una asíntota oblicua en y = mx + n si:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right]$$

Para conocer la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua se hallan:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - (mx+n)\right]$$

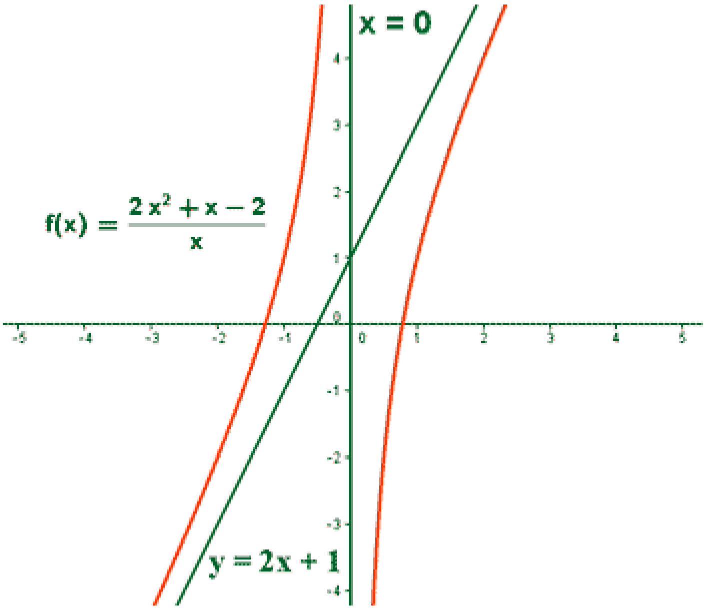
ASÍNTOTAS OBLICUAS:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x}$$

Para hallar las asíntotas oblicuas calculamos:

$$m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{2x^2 + x - 2}{x}}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{2x^2 + x - 2}{x}}{x}\right) = = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x^2}\right) = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2 - 2x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x - 2}{x}\right) = 1$$



Calculamos la posición de la curva respecto a la asíntota oblicua:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x} - (2x+1) \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2 - 2x^2 - x}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = 0^+$$

La curva está encima de la asíntota oblicua.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2}{x} - (2x+1) \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 2 - 2x^2 - x}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = 0^-$$

La curva está por debajo de la asíntota oblicua.

MÉTODO GENERAL PARA HALLAR LAS ASÍNTOTAS OBLICUAS

Para hallar una asíntota oblicua se hace la división del numerador entre el denominador, siendo el cociente la fórmula de la asíntota.

- **Caso I: Asíntota oblicua lineal**

Si grado de P(x) - grado de Q(x) = 1

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & mx+n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = mx + n + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

La recta **y = mx + n** es asíntota oblicua si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (mx+n) \right] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (mx+n) \right] = 0$$

Para calcular la posición de la curva respecto de las asíntotas oblicuas, hallamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Si el límite da 0^+ (cero por la derecha) la gráfica de la función se encuentra por encima de la asíntota. Si el límite da 0^- (cero por la izquierda) la gráfica de la función se encuentra por debajo de la asíntota.

Podemos calcular la asíntota oblicua del ejemplo anterior por este método:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x}$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^2} - x + 2 & x \\
\hline
\cancel{-2x^2} & 2x - 1 \\
\hline
\cancel{-x} & \\
\cancel{+x} + 2 &
\end{array}
$$

Por lo tanto, la asíntota oblicua es: $y = 2x - 1$

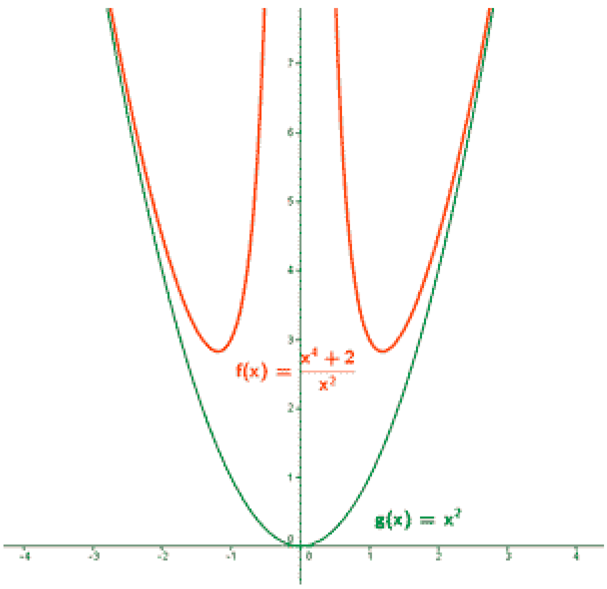
- **<u>Caso II: Asíntota oblicua no lineal o ramas parabólicas</u>**

  Si grado de P(x) - grado de Q(x) ≥ 2

  En este caso hay una asíntota oblicua no lineal o rama parabólica, donde se cumple que:

  - **Hacia arriba si** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = +\infty$

  - **Hacia abajo si** $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = -\infty$



Asíntota oblicua:

$$f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$$

Para calcular la asíntota realizamos la división entre el numerador y el denominador:

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^2} + x - 2 & x \\ \hline \cancel{-x^4} + 2 & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4 + 2}{x^2} = x^2 + \frac{2}{x^2}$$

Por lo tanto, existe una rama parabólica (asíntota oblicua no lineal):
$y = x^2$

Resumen

Una función racional puede tener asíntotas verticales, horizontales y oblicuas:

1) Tiene tantas asíntotas verticales como raíces reales distintas tenga el denominador y que no lo sean del numerador.

2) Tiene una asíntota horizontal si el grado del numerador es menor o igual que el del denominador.

3) Tiene una asíntota oblicua si el grado del numerador es uno más que el del denominador.

4) Tiene una rama parabólica (asíntota oblicua no lineal) si el grado del numerador es 2 o más que el del denominador.

Una función racional puede tener varias asíntotas verticales, y a lo sumo una horizontal u oblicua. Si la tiene horizontal, no la tiene oblicua y viceversa.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. Continuidad de una función.

2. Propiedades de las funciones continuas.

3. Tipos de discontinuidad.

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función es **continua** en un punto a si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a.
2. La función está definida en el punto a.
3. Los dos valores anteriores coinciden.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Una función es continua en un intervalo si es continua en todos los puntos del intervalo.

De la misma forma, una función es continua en todo su dominio cuando lo es en todos los puntos que componen su dominio.

CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Una función polinómica $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ es continua en todo punto de R.

Una función racional $f(x) = P(x) / Q(x)$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, es continua en todo R excepto aquellos puntos que anulen el denominador.

Una función radical o irracional $f(x) = \sqrt{g(x)}$ es continua en todo R si n es impar y en los puntos donde $g(x) \geq 0$ si n es par.

Una función exponencial $f(x) = a^x$ (donde $a > 0$ y $a \neq 1$) es continua en todo R.

Una función logarítmica $f(x) = \log_a x$ (donde $a > 0$ y $a \neq 1$) es continua en el intervalo $(0, +\infty)$.

Las funciones trigonométricas $f(x) = \text{sen } x$ y $f(x) = \cos x$ son continuas en todo R.

La función trigonométrica $f(x) = \text{tg } x$ es continua en todo R excepto en los puntos de la forma $x = (\pi/2) + k\cdot\pi$.

Ejemplo del cálculo de la continuidad de una función:

$$1) \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$$

Al tratarse de una función racional, estudiamos los puntos donde la función no está definida.

Esto ocurre cuando se anula el denominador, es decir, cuando $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

Por lo tanto la función es continua en: $R - \{3\}$.

$$2) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

La función $f(x)$ es una función irracional. Por lo tanto estudiamos cuando $x^2 - 9 \geq 0$.

$x^2 - 9 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) \geq 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -3$ y $x = 3$.

Estudiamos el signo en los siguientes tres intervalos:

$A = (-\infty, -3) \Rightarrow f(-4) = \sqrt{7} > 0$.

$B = (-3, 3) \Rightarrow f(0) = \sqrt{-9}$ No existe.

$C = (3, +\infty) \Rightarrow f(4) = \sqrt{7} > 0.$

Por lo tanto la función es continua en: $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

3) $$f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$$

La función f(x) es una función logarítmica. Por lo tanto estudiamos cuando $1 - x^2 > 0$.

$1 - x^2 \Rightarrow (1 - x)(1 + x) > 0 \Rightarrow$ Las raíces son $x = -1$ y $x = 1$

Estudiamos el signo en los siguientes tres intervalos:

$A = (-\infty, -1) \Rightarrow f(-2) = \ln(-3)$ No existe.

$B = (-1, 1) \Rightarrow f(0) = \ln 1 > 0.$

$C = (1, +\infty) \Rightarrow f(2) = \ln(-3)$ No existe.

Por lo tanto la función es continua en: $(-1, 1)$.

2. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Dadas las funciones f(x) y g(x) continúas en el punto x = a, tenemos que:

1) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$

2) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ es continua en $x = a$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$

4) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$ siempre que $g(a) \neq 0$

5) Múltiplo escalar: $t \cdot f(x)$ con $t \in \mathbb{R}$, es continua en $x = a$

3. TIPOS DE DISCONTINUIDAD

DISCONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Una función es discontinua en un punto a cuando no es continua en el, es decir, cuando no se cumple alguna de las tres condiciones de continuidad.

1. No existe el valor de la función en $x = a$, es decir, no existe $f(a)$.

2. No existe el límite de la función en $x = a$, es decir, no existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a.

3. Existe $f(a)$ y el límite de $f(x)$ en $x = a$ pero son distintos:

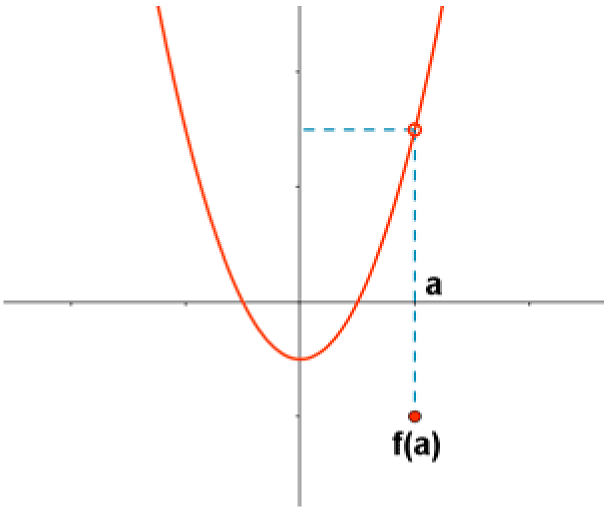
$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

DISCONTINUIDAD EVITABLE

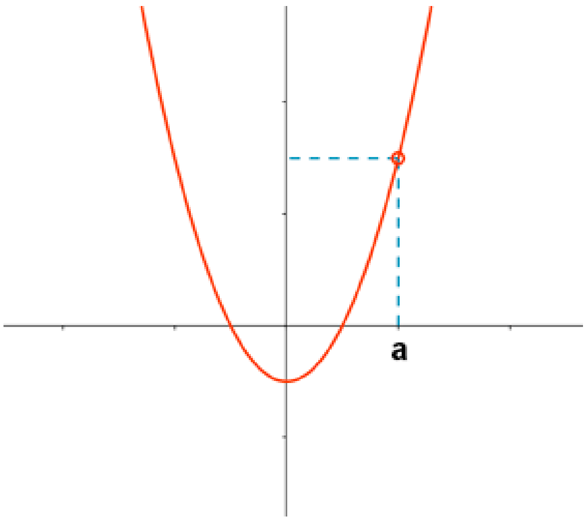
Una discontinuidad en x = a es evitable si existe el límite de la función f(x) en x = a y es finito, pero es distinto de la función en x = a o no existe el valor de la función en x = a.

Esta discontinuidad se llama evitable porque la función se convierte en continua al asignar el valor del límite al valor de la función en x = a:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$



$$f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$$

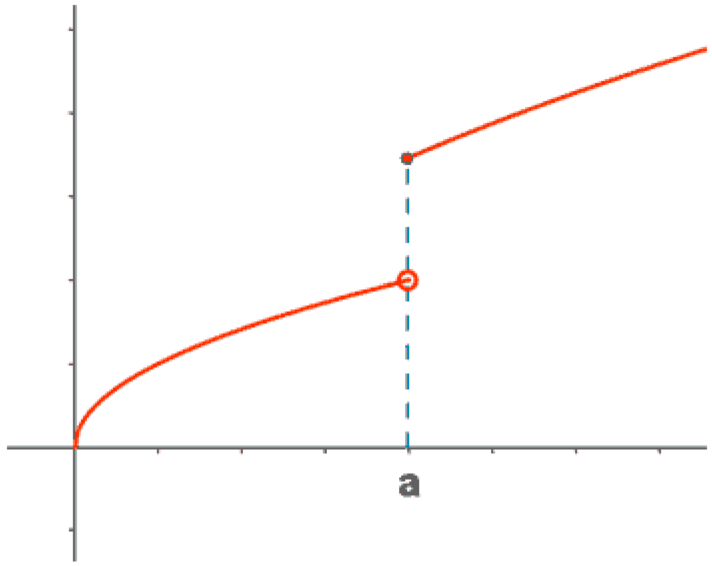


La función no está definida en x = a

DISCONTINUIDAD DE 1ª ESPECIE O DE SALTO

Una discontinuidad en $x = a$ es de 1ª especie o de salto si existen los límites laterales y son distintos, o alguno de ellos es infinito.

Decimos que es de salto finito si los límites laterales son finitos y de salto infinito si alguno de ellos es infinito.

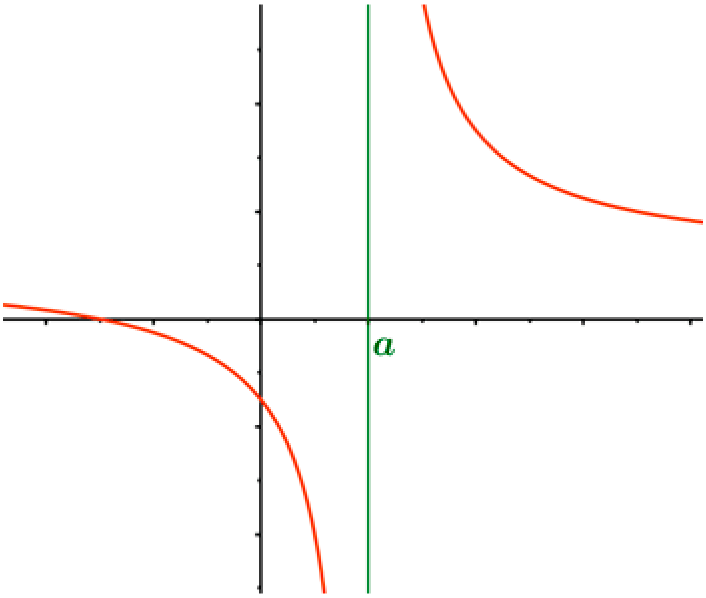


- **Discontinuidad de salto finito**

  Este tipo de discontinuidad ocurre cuando no existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a.

  Es decir, aunque existen los límites laterales, estos no coinciden:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

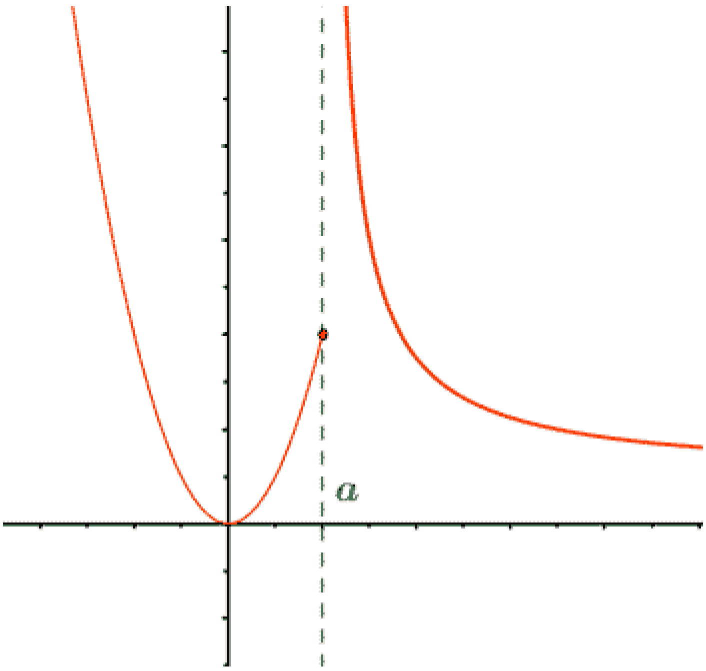


- **Discontinuidad de salto infinito**

Los dos límites laterales en x = a son infinito.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$



- **Discontinuidad de salto infinito**

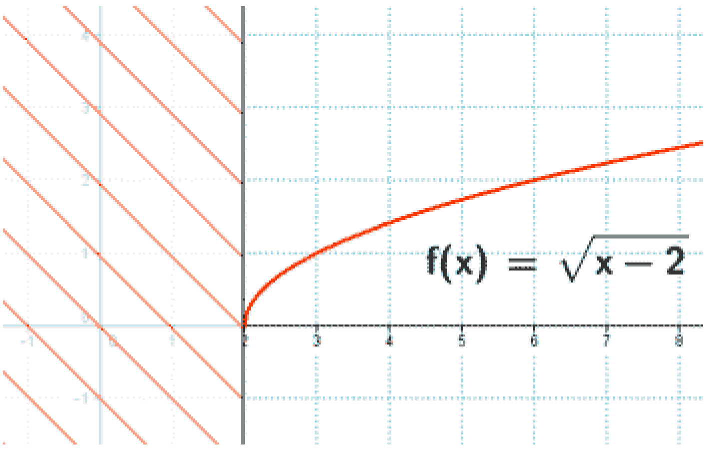
  Uno de los dos límites laterales en x = a es infinito.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

DISCONTINUIDAD DE 2ª ESPECIE O DICONTINUIDAD ASINTÓTICA

Una discontinuidad en x = a es de 2ª especie si uno o los dos límites laterales no existen.



Discontinuidad de segunda especie

$$f(2) = \sqrt{2 - 2} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x - 2} = \sqrt{2^+ - 2} = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) \quad \text{no existe}$$